HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitukset 7 (22.03.2012)

Todennäköisyysavaruudessa $\Omega = \{-1, 0, 1\}^T$, $T \in \mathbb{N}$, jossa $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T)$, $\omega_i \in \{-1, 0, 1\}$, olkoon $\xi_t(\omega) = \omega_t$, $t = 1, \dots, T$.

Oletetaan että referenssi todennäköisyyden P:n suhteen, satunnaismuuttujat $\xi_t(\omega)$ ovat riippumattomia a samoin jakautuneita jolla

$$P(\xi_t = -1) = P(\xi_t = 0) = P(\xi_t = +1) = 1/3.$$

Olkoon $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ triviiali σ-algebra ja filtraatio $\mathbb{F} = \mathcal{F}_t$, jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_t)$.

Määritellään induktiolla satunnais-prosessit $(Z_t : t = 0, \dots, T)$ and $(X_t : t = 0, \dots, T)$, jossa $Z_0(\omega) = 1$, $X_0(\omega) = 0$, ja

$$Z_t(\omega) = Z_{t-1}\big(1 + r\xi_t(\omega)\big)$$
$$X_t(\omega) = X_{t-1}(\omega) + \xi_t(\omega)$$

jossa $-1 < r < 1$ n vakio.

1. osoita että (Z_t) ja (X_t) ovat $(\mathbb{F}, P)$-martingaaleja. Osoita myös että $Z_t(\omega) > 0$ $(P = 1)$ ja $E_P(Z_t(\omega)) = 1$.

2. laske ennustettava kovariaatio

$$\langle Z, X \rangle_t = \sum_{s=1}^{t} E_P(\Delta X_s \Delta X_s |\ \mathcal{F}_{s-1})$$

   Huomataan että ennustettava kovariaatio riippuu todennäköisyydestä.

3. Osoita että

$$Z_t X_t - \langle X, Z \rangle_t$$

   on $(P, \mathbb{F})$-martingaali.

4. Laske odotusarvo

$$E_P(Z_t X_t) = E_P(Z_0 X_0) + E(\langle Z, X \rangle_t)$$

5. Laske esitykset

$$Z_t = Z_0 + (H \cdot X)_t + Z_t^{\perp}$$
$$X_t = X_0 + (K \cdot Z)_t + X_t^{\perp}$$

   jossa $(H \cdot X)_t$ on martingaali muunnos, $Z_t^{\perp}$ on $(P, \mathbb{F})$-martingaali jolla $\langle Z^{\perp}, X \rangle_t = 0$, ja $X_t^{\perp}$ on $(P, \mathbb{F})$-martingaali jolla $\langle X^{\perp}, Z \rangle_t = 0$.

6. Laske esitykset

$$
\begin{aligned}
Z_t &= Z_0 + (H \cdot X)_t + Z_t^{\perp} \\
X_t &= X_0 + (K \cdot Z)_t + X_t^{\perp}
\end{aligned}
$$

todennäköisyyden $\widetilde{P}$:n suhteen jolla satunnaismuuttujat $\xi_t(\omega)$ ovat myös riippumattomia ja samoin jakautuneita, mutta

$$
\widetilde{P}(\xi_t = -1) = \widetilde{P}(\xi_t = +1) = 1/2 \quad \text{ja } \widetilde{P}(\xi_t = 0) = 0
$$

7. σ-algebrassa $\mathcal{F}_T = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_T)$ määritellään todennäköisyysmitta $Q \sim P$ jolla

$$
\frac{dQ}{dP}(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = Z_T(\omega).
$$

eli mitan vaihto kaava $E_Q(V) = E_P(Z_T V)$ on voimassa kakille $\mathcal{F}_T$-mitalliselle satunnaismuuttujalle $V(\omega)$.

Laske satunnaisprosessin $\xi_t(\omega)$ jakauma todennäköisyyden Q:n suhteen, eli

$$
Q\big(\omega : \ \xi_1(\omega) = x_1, \dots, \ \xi_T(\omega) = x_T\big)
$$

jossa $x_t \in \{-1, 0, 1\}$.

8. Laske X_t prosessin Doobin hajotelma Q mitan suhteen filtraatiossa $\mathbb{F}$.