HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitus-6 (01.03.2012)

1. Olkoon $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$ filtraatio todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$. Osoita että $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on $(P, \mathbb{F})$-martingaali, jos ja vain jos $M_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ ja $\forall t \in \mathbb{N}$

$$E_P(M_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) = M_t(\omega)$$

Vihje Osoita induktiolla että $\forall 0 \le r \le t \in \mathbb{N}$,

$$E_P(M_t|\mathcal{F}_r)(\omega) = M_r(\omega)$$

2. Olkoon $Y_1, \dots, Y_T$ riippumattomia ja samoin jakautuneita Binaari(p) jakautuneita, jolla $P(Y_t = 1) = 1 - P(Y_t = 0) = p$.

Otamme todennäköisyysavaruudeksi kolikko avaruus $\Omega = \{0,1\}^T$ ja jossa $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)$, $\omega_t \in \{0,1\}$ ja oletetaan että $Y_t(\omega) = \omega_t \in \{0,1\}$
.
Olkoon $X_t(\omega) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_t$.

Osoita että X_t on Binomi(p,t) jakautunut, eli että

$$P(X_t = x) = \binom{t}{k} p^x (1-p)^{t-x}, \quad \text{kun } x \in \{0,1,2,\dots,n\},\ P(X=x) = 0 \text{ muuten}$$

3. Olkoon $(S_t, B_t : t = 0, 1, \dots T)$ rahoitusinstrumentit jossa

$$S_t(\omega) = (1+u)^{X_t(\omega)}(1+d)^{t-X_t(\omega)}, \text{ ja } B_t = B_0(1+r)^t \ ,$$

jossa $B_0, S_0 > 0$ ja $u > r > d > -1$ ovat deterministisia.

Esimerkiksi otamme $B_0 = S_0 = 1$, $d = -0.2, r = 0.1, u = 0.3$.

Olkoon $S_t = S_t/B_t$ diskontattu osakkeen arvo.

   (a) Osoita että riskineutraali mitta $Q \sim P$ jolla S_t on $(Q, \mathbb{F})$-martingaali, on yksikäsitteinen, ja laske se.
   Vihje Koska $Q \sim P$, seuraa että

$$Q(Y_t = 1|\mathcal{F}_{t-1}) = \Big(1 - Q(Y_t = 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega)\Big) \in (0,1)$$

Kirjoita esiin martingaali ehto

$$E_Q(\widetilde{S}_t|\ \mathcal{F}_{t-1})(\omega) = \widetilde{S}_{t-1}(\omega)$$

filtraatiossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$ jossa

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \dots, Y_t) = \sigma(S_1, \dots, S_t) \quad , \quad t \in \mathbb{N}$$

(b) Laske momentti

$$\varphi(\theta) := E_Q(\{S_t\}^m), \text{ kun } m \in \mathbb{N}$$

Huom: muista Newtonin kaava:

$$(x+y)^t = \sum_{s=0}^{t} \binom{t}{s} x^s y^{t-s}$$

4. Olkoon filtraatio $\{\mathcal{F}_t\}$ jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(S_1, \dots, S_t)$. Osoita että kun $r \le t$, ja $f(x)$ on funktio, seuraa että

$$E_Q(f(S_t)|\mathcal{F}_r)(\omega) = E_Q\big(f(xS_{t-r})\big)|_{x=S_r(\omega)}$$

eli vasemmalla puolella on ehdollinen odotusarvo ja oikealla puolella on odotusarvo laskettu pisteessä $x = S_r(\omega)$.

5. Laske hinta ja suojausstrategia (B_t, S_t)-markkinamallissa eurooppalaiselle optiolle $F(\omega) = \{S(\omega)_T\}^2$, jossa maturiteetti aika on $T = 3$.

$$E_Q(FB_T^{-1}|\mathcal{F}_t)(\omega)$$

ja sen diskreetti gradientti (diskreetti Malliavin derivaatta):

$$\nabla_t E_Q(FB_T^{-1}|\mathcal{F}_t)(\omega) = B_T^{-1} E_Q(\nabla_t F|\mathcal{F}_t)(\omega) = B_T^{-1} E_Q(\nabla_t F|\mathcal{F}_{t-1})(\omega)$$

jossa

$$\nabla_t F(\omega) = \nabla_t F(\omega_1, \dots, \omega_T) =$$
$$F(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}, 1, \omega_{t+1}, \dots, \omega_T) - F(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}, 0, \omega_{t+1}, \dots, \omega_T).$$
$$\omega_t \in \{0, 1\},$$

Vihje Piirra binomipuu, ja esitä suojausstrategiassa kaikkissa $\#\Omega = 2^T$ tapauksissa.