HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitus-5 (23.02.2012)

1. Olkoon $X, Y \in L^2(P)$, ja olkoon

$$H := \{aY(\omega) + b : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq L^2(P)$$

Laske projektio $\hat{X}(\omega) = (\Pi_H X)(\omega) = \hat{a}Y + \hat{b} \in H$ jossa $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$ ovat deterministisia, jolla $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$E_P\big((X - \hat{a}Y - \hat{b})^2\big) \leq E_P\big((X - aY - b)^2\big) \text{ ja}$$
$$E_P(X(aY + b)) = E_P\big((\hat{a}Y + \hat{b})(aY + b)\big)$$

2. Olkoon $X(\omega), Y(\omega)$ P-riippumattomia satunnaisvektorit, $f(x, y)$ Borel mitallinen funktio.

$$E_P(f(X, Y)|\sigma(Y))(\omega) = \int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}), Y(\omega))P(d\widetilde{\omega})$$
$$= \int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}), y)P(d\widetilde{\omega})\Big|_{y=Y(\omega)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, Y(\omega))P_X(dx)$$

Jossa $P_X(B) = P(\omega : X(\omega) \in B)$, $B \subseteq \mathbb{R}^d$ on Borelin joukko.

Voit olettaa $0 \leq f(x, y) = g(x)h(x)$, jossa g, h ovat mitallisia. Voidaan rakentaa sitten jonoa

$$f_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} g_n(x)h_n(x) \uparrow f(x, y) \quad \forall x, y$$

ja käyttää monotoonisen konvergenssin lauseetta.

3. Osoita osittaisintegroinnin kaava jonoille $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$

$$x_n y_n = x_0 y_0 + \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}\Delta y_k + \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \Delta y_k \Delta x_k\ ,$$

jossa $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

4. Osoita seuraava lemma

Jos $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ on $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N}\}$-martingaali ja on myös $\{\mathcal{F}_t\}$-ennustettava, se on satunnaisvakio: $X_t(\omega) = X_0(\omega) \quad \forall t \in \mathbb{N}$.

5. Olkoon $(X_n)_{n\geq 0}$ $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$-sopiva prosessi jolla $X_n \in L^1(P)$ kaikille $n \geq 0$, ja

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} E_P(\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad A_0 = 0$$

   (a) osoita: $A_n \in L^1$ ja se on $\{\mathcal{F}_t\}$-ennustettava.

   (b) osoita että $M_n := (X_n - X_0 - A_n)$ on $(P, \{\mathcal{F}_n\})$-martingaali, jolla $M_0 = 0$.

   Yhtälö

$$X_n = X_0 + A_n + M_n$$

   on prosessin (X_t) *Doobin* hajotelma martingaali- ja ennustettavaan osiin.

   (c) Osoita että Doobin hajotelma on yksikäsitteinen: jos $(M')_n$ on toinen $(P, \{\mathcal{F}_n\})$-martingaali ja (A'_n) on toinen ennustettava prosessi jolla $M'_0 = A'_0 = 0$ and

$$X_n = X_0 + A'_n + M'_n$$

   seuraa $M = M'$ and $A = A'$. **Vihje**: käytä tehtävä 4).

   (d) Osoita että (X_n) kun on alimartingaali (vastaavasti. ylimartingaali) Doobin hajotelman ennustettava osa A_n on ei-vähenevä (vastaavasti ei-kasvava).

   (e) Olkoon (M_n) martingaali jolla $M_n \in L^2(P)$ for all $n \geq 0$. Osoita Jensenin epäyhtälön avulla että (M_n^2) on alimartingaali.

   Osittaisintegroinnin kaavalla, kirjoita Doobin hajotelma alimartingaalille (M_n^2).