HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitus -1 (26.01.2012)

Notaatio: $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

1. Osoita:

$$\det \begin{pmatrix} (1-p_1) & -p_2 & \dots & -p_n \\ -p_1 & (1-p_2) & \dots & -p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_1 & -p_2 & \dots & (1-p_n) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_n$$

   Vihje: induktiolla tai lineaarialgebran Sylvesterin lemman avulla:

   Kun A ja B ovat $n \times m$ ja vastaavasti $m \times n$-matriiseja,

$$\det(Id_n + AB) = \det(Id_m + BA)$$

2. Olkoon V vektoriavaruus, esimerkiksi $V = \mathbb{R}^d$. Määritelmän mukaan $\mathcal{C} \subseteq V$ jos ja vain jos

$$x, y \in \mathcal{C},\ 0 \le \alpha \le 1 \Longrightarrow \alpha x + (1-\alpha) y \in \mathcal{C}$$

   Osoita että kun $n \in \mathbb{N}$,

$$x_i \in \mathcal{C},\ \alpha_i \ge 0, i = 1, \dots, n \text{ ja } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in \mathcal{C}$$

3. *Farkas' lemma*

   Olkoon A $(d \times n)$ matriisi, ja $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$.

   Jompikumpi vaihtoehto on aina tosi:

   (a) On olemassa $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n_+$ jolla $j = 1, \dots, n$ jolla $Ax = b$

   (b) On olemassa $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ jolla $yA \in \mathbb{R}^d_+$ ja $b \cdot y < 0$.

   Todista Farkas lemman erottavan hypertason lauseen avulla.

   Vihje Geomeettrinen tulkinta: olkoon $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$ A-matriisin sarake-vektorit. Osoita että

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i :\ \alpha_i \in \mathbb{R}_+ \right\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

joka on vektoreiden $a_1, \dots, a_n$ virittämä kaartio on konveksi ja suljettu $\mathbb{R}^d$:ssa.

(a) ja (b), vastaavat vaihtoehtoja $b \in \mathcal{C}$ tai $b \notin \mathcal{C}$.

4. Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, jossa jokainen tapahtuma $\{ \omega_i\}$ on mahdollinen, eli $P(\{ \omega_i\}) > 0$ $\forall i$ referenssi todennäköisyysmitan suhteen.

   Tarkastellaan markkinamalli jossa on kaksi ajanhetkeä $t = 0, 1$, ja kaksi sijoitusintstrumenttia

$$S_t(\omega), U_t(\omega) \in \mathbb{R}_+$$

   Olkoon

$$S_1(\omega_1) = 1 \text{ €}, S_1(\omega_2) = 3/2 \text{ €}, S_1(\omega_3) = 1/2 \text{ €}$$
$$U_1(\omega_1) = 0 \text{ €}, U_1(\omega_2) = 1/2 \text{ €}, U_1(\omega_3) = 1 \text{ €}$$

   - Laske instrumenteille arbitraasi vapaaiden hintojen joukko, eli kaikki mahdollisia hintapareja $(c(S), c(U))$ joilla kaupan vastapuolelle ei synny arbitraasi mahdollisuuksia.
   - Laske instrumenteille arbitraasi vapaaiden hintojen joukko $(c(S), c(U)) \in \mathbb{R}^2_+$ silloin kun $\{ \omega_3\}$ on mahdoton tapahtuma, eli $P(\omega_3) = 0$,

   Vihje Erottavan hypertason lauseen avulla, osoitettiin luennolla että arbitraasi ei synny jos ja vain jos on olemassa todennäköisyysvektori $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3_+$, jolla

$$q_1 S_1(\omega_1) + q_2 S_1(\omega_2) + q_3 S_1(\omega_3) = c(S)$$
$$q_1 U_1(\omega_1) + q_2 U_1(\omega_2) + q_3 U_1(\omega_3) = c(U)$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

   Huomautus Tässä tehtävässä numeräärimme on euro €. Eli meidän käytössä on kolmas instrumentti $B_t(\omega) \equiv 1\text{€}$ $\forall t \in \{0, 1\}, t \in 0, 1$.