

**HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitukset 12
(04.05.2012)**

Olkoon jatkuva aika markkinamalli jossa on instrumentteja $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}$

$$\begin{aligned}dX_t &= X_t(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^{(1)}), & X_0 &= 1 \\dY_t &= Y_t(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^{(2)}), & X_1 &= 1\end{aligned}$$

jossa $W_t^{(1)}$ ja $W_t^{(2)}$ ovat molemmat Brownin liikkeitä, referenssi mitan P :n suhteen, muita instrumentteja ei ole vielä käytössä.

Brownin liikkeiden kvadrattinen kovariaatio on

$$[W^{(1)}, W^{(1)}]_t = [W^{(2)}, W^{(2)}]_t = t,$$

ja ristivariaatio

$$[W^{(1)}, W^{(2)}]_t = ct, \text{ jossa } c \in [-1, 1].$$

Siis $W^{(1)}, W^{(2)}$ ovat riippumattomia kun $c = 0$, muuten ovat korreloituneita, ja täysin korreloituneita kun $c = \pm 1$.

1. Millä c arvoilla malli on arbitraasi vapaa ?

Vihje: valitse yhden prosessin numerääriseksi esimerkiksi Y_t , ja etsi riskineutraalimitta $Q \sim P$ jolla $\tilde{X}_t = (X_t/Y_t)$ on martingaali.

2. Laske equivalenttien martingaali-mittojen joukon (c arvon riippuen) myös kun valitaan X_t numerääriseksi.
3. Millä c arvoilla martingaali mitta on yksikäsitteinen ?
4. Laske arbitraasi vapaiden hintojen joukko swap optiolle

$$F(\omega) = (X_T(\omega) - Y_T(\omega))^+$$

Vihje Siis arbitraasi vapaiden hintojen joukko koostuu hinnoista

$$c(F) = Y_0 E_Q \left(\frac{F}{Y_T} \right).$$

jossa Q on riskineutraali numeräärin valinnalla Y_T .

5. Silloin kun riskineutraali mitta on yksikäsitteinen laske option $F(\omega)$:n suojausstrategian.

Vihje: laske ensin option arvoa hetkellä $0 < t < T$,

$$c_t(F) = Y_t E_Q \left(\frac{F}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

6. Lisätään markkinmalliin riskitön instrumentin B_t , jolla $B_0 = 1$ ja

$$dB_t = B_t r dt$$

Vastaa edellisiin kysymyksiin laajennetussamarkkinamallissa.