

**HY Johdatus Matemaattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitukset 11  
(26.04.2012)**

1. Olkoon  $X_t, Y_t$  jatkuvat polut joilla on olemassa kvadrattiset kovariaatiot  $[X, X]_t, [Y, Y]_t$  ja ristivariaatio  $[X, Y]_t$ .

Osoita että

$$Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}[X, X]_t\right) \left( z_0 + \int_0^t \exp(-X_s + \frac{1}{2}[X, X]_s) d(Y_s - [X, Y]_s) \right)$$

on lineaarisen poluttaisen differentiaali yhtälön ratkaisu

$$dZ_t = Z_t dX_t + dY_t, \quad \text{alkuarvolla } Z_0 = z_0, \text{ eli } Z_t \text{ joka toteuttaa}$$

$$Z_t = z_0 + \int_0^t Z_s dX_s^- + Y_t - Y_0$$

jossa integraali on poluttainen etuperäinen integraali.

Vihje:

Muistetaan että kun  $X_t$  ja  $Y_t$  ovat jatkuvia ja rajoitetusti heilähteleviä, eli  $\text{Var}_{[0,t]}(X) < \infty$   $\text{Var}_{[0,t]}(Y) < \infty$ , lineaarisen differentiaali yhtälön ratkaisu on

$$Z_t = z_0 \exp(Z_t) \quad , \text{ kun } Y_t \equiv \text{vakio.} \quad , \quad \text{muuten}$$

$$Z_t = \exp(X_t) \left( z_0 + \int_0^t \exp(-X_s) dY_s \right)$$

(tarkista !),

ja kun  $Y_t \equiv \text{vakio}$  ja  $\exists [X, X]_t > 0$ , Ito Föllmerin kaavasta seuraa

$$Z_t = z_0 \exp\left(X_t - \frac{1}{2}[X, X]_t\right)$$

Käytä osittaisintegroitikaava

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d[X, Y]_t$$

yleisessä tapauksessa.

2. Olkoon  $X_t$  jatkuva polku jolla on kvadraattinen variaatio  $X_t$ .

Olkoon

$$X_t^* := \max_{0 \leq s \leq t} X_s$$

joukseva maksimi. Osoita että kuvaus  $t \mapsto X_t^*$  on jatkuva.

Olkoon  $F(x, y) \in C^{1,2}$  eli  $F_x(x, y), F_{xx}(x, y), F_y(x, y)$  ovat olemassa ja jatkuvia.

Laske moniulotteisen Ito-Föllmerin kaavalla etuperäinen poluttainen integraali

$$\int_0^t F_x(X_s, X_s^*) dX_s$$

Laske etuperäinen poluttainen integraali

$$\int_0^t X_s^* dX_s$$

3. Osoita gaussinen osittais-integrointi kaava: jos  $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$  on standardi gaussinen,  $F(G) \in C^1$

(derivoituva jatkuvalla derivaatalla  $F'(x)$ )

$$E_P(F'(G)) = E_P(F(G)G)$$

Vihje: kirjoita odotusarvo integraalina gaussisen jakauman suhteen ja käytä perinteistä analyysin osittaisintegrointikaavaa.

4. Miten kirjoitetaan gaussinen osittais-integroinnin kaava satunnaismuuttujalle  $G \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  ?