HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitukset 10 (19.04.2012)

1. Olkoon X_t, Y_t jatkuvat polut joilla kvadrattiset variaatiot $[X,X]_t$, $[Y,Y]_t$, $[X,Y]_t$ ovat olemassa. Osoita moniulotteisella Ito-Föllmerin kaavan avulla

$$F(X_t,Y_t,t) - F(X_0,Y_0,0) - \int_0^t \frac{\partial F(X_s,Y_s,s)}{\partial s} ds$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F(X_s,Y_s,s)}{\partial x^2} d[x,x]_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F(X_s,Y_s,s)}{\partial y^2} d[y,y]_s$$
$$-\int_0^t \frac{\partial^2 F(X_s,Y_s,s)}{\partial x \partial y} d[x,y]_s =$$
$$\int_0^t \frac{\partial F(X_s,Y_s,s)}{\partial x} dX_s + \int_0^t \frac{\partial F(X_s,Y_s,s)}{\partial y} dY_s +$$

osittaisintegroinnin kaava

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X,Y]_t$$

2. Olkoon $(W(t): t \geq 0)$. Osoita että $M(t) = W(t)^2 - t$ on martingaali Brownin liikkeen virittämässä filtraatiossa $\mathbb{F}^W$, jossa $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$.

3. Osoita että $S_t := S_0 \exp\big(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\big)$ jossa $S_0 > 0$ on deterministinen, on $\mathbb{F}^W$ martingaali.

   Osoita myös että S_t on lineaarisen stokastisen differentiaali yhtälön ratkaisu

$$dS_t = S_t \sigma dW_t$$

4. Olkoon $(W(t): t \geq 0) \perp\!\!\!\perp (B(t): t \geq 0)$ riippumattomia Brownin liike prosesseja. Olkoon $t_i^n = i2^{-n}$.

   Osoita että

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \Big(W(t_i^n \wedge t) - W(t_{i-1}^n \wedge t)\Big)\Big(B(t_i^n \wedge t) - B(t_{i-1}^n \wedge t)\Big) \xrightarrow{L^2} 0$$

   jossa konvergenssi on $L^2(P)$:n mielessä.

   (Borel Cantelli lemman avulla voidaan osoitta että konvergenssi pätee myös P-melkein varmasti ja kvadrattinen ristivariaatio on $[W,B]_t = 0$).

5. Olkoon edelleen (W_t) ja (B_t) riippumattomia referenssi todennäköisyyden P:n suhteen.

   Käsitellaan aikajatkuva osakemalli jossa on kaksi oseketta:

$$
\begin{aligned}
dS_t &= S_t(\mu \, dt + \sigma \, dW_t) \quad , S_0 > 0 \\
dX_t &= X_t(b \, dt + a \, dB_t), \quad X_0 > 0
\end{aligned}
$$

   jossa $\mu, \sigma, a, b, \in \mathbb{R}$, $S_0, X_0 > 0$.

   Koska molemmat $S_t, X_t > 0 \ \forall t$ P-melkein varmasti jompikumpi osake kelpaa numeraäriksi.

   Olkoon

$$
\widetilde{X}_t = X_t / S_t \text{ ja } \widetilde{S}_t = S_t / X_t
$$

   Laske Iton kaavan avulla (tai osittaisintegroinnilla) $\widetilde{X}_t$ prosessin (vastaavasti $\widetilde{S}_t$ prosessin) stokastinen differentiaali yhtälö.

6. Millä σ, μ, a, b arvoilla $\widetilde{S}_t$ (vastaavasti $\widetilde{X}_t$) ovat martingaaleja P todennäköisyyden suhteen ?