

HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitus-3 (09.02.2012)

Tarkastellaan yhden periodin (B, S) markkinamalli jossa (B_t) on riskitön pankkitilin sijoitus ja (S_t) on osakkeen arvo, $t = 0, 1$, äärellisessä todennäköisyysavaruudessa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Referenssitodennäköisyys on P jolla $P(\{\omega_i\}) = 1/3 > 0$ kun $i = 1, 2, 3$.

Olkoon $B_0 = S_0 = 1$, $B_1 = (1 + r)B_0$ ja $S_1(\omega) = (1 + R(\omega))S_0$, j

ossa osakkeen tuoton $R_1(\omega)$ mahdolliset arvot ovat $u = 8/5, d = 4/5, r = 6/5$ ja

$$R(\omega_1) = d, \quad R(\omega_2) = r, \quad R(\omega_3) = u$$

1. Esitä riskineutraali todennäköisyyksien juokko $Q \sim P$, numerääriin B_t :n suhteen, ja osoita että tämä (B, S) -malli on arbitraasivapaa.

Esitä riskineutraali mittojen joukko numerääriin S_t :n suhteen.

Onko markkinamalli täydellinen ?

2. Olkoon $X(\omega) = (S_1(\omega) - 1)^+$ eurooppalainen osto optio (call) lunastushinnalla $k = 1$. Laske arbitraasivapaiden hintojen joukko optiolle X . Osoita että X ei ole suojattavissa tässä (B, S) -markkinamallissa.
3. Laske eurooppalaisen myynti-option (put) $F(\omega) = (1 - S_1(\omega))^+$ arbitraasivapaiden hintoja (B, S) markkinamallissa.

Vihje

$$S_1(\omega) - k = (S_1(\omega) - k)^+ - (k - S_1(\omega))^+$$

jossa $x^+ = \max\{x, 0\}$.

4. Laske ylisuojaus-strategiat eurooppalaiselle optiolle $X(\omega)$ ja $F(\omega)$, (B, S) -markkinamallissa.
5. Valitse arbitraasivapaa alkuhinta ((B, S) -markkinamallissa) $c(X)$ eurooppalaiselle osto-optiolle $X(\omega) = (S_1(\omega) - 1)^+$.

Laske riskineutraalimittojen joukko numerääriin B_t :n suhteen.

Onko laajennettu markkinamalli $(B_1, S_1, X; B_0, S_0, c(X))$ arbitraasivapaa ?

Onko täydellinen ?

Laske riskineutraalimittojen joukko numerääriin S_t :n suhteen.

6. Laske hinta ja suojaus-strategia eurooppaisille myynti-optioille $X(\omega) = (\kappa - S_1(\omega))^+$, markkinamallissa $(B_1, S_1, X; B_0, S_0, c(X))$ lunastushinnan κ riippuen.