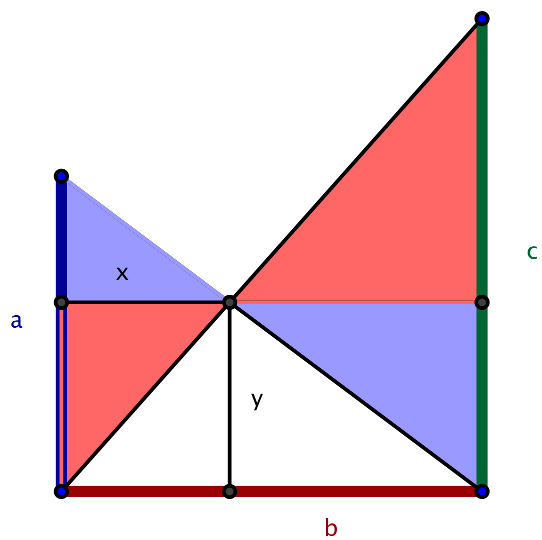
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Geometria 2012
Harjoitus 2
23.1. alkavalle viikolle
Ratkaisuja (Jani Hannula)

Huom. tehtävissä 1-4 on jätetty yksityiskohtia kirjoittamatta ja pyritty esittämään ensisijaisesti todistuksen idea, joka on helposti täydennettävissä.

1. Kahden pylvään korkeudet ovat a ja b. Pylväät on tuettu mm. vaijereilla, jotka johtavat toisen pylvään tyvestä toisen huippuun. Millä korkeudella nämä vaijerit kohtaavat toisensa?

Ratkaisu. Olkoon y kysytty korkeus, pylväiden korkeudet a ja b ja muut etäisyydet kuvan mukaisesti. Kuvan punaiset ja siniset kolmiot ovat keske-



nään yhdenmuotoiset (miksi? käy läpi kulmat...). Yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan suhteet:

$$\begin{cases} (a-y)/y = x/(b-x) \\ y/(c-y) = x/(b-x). \end{cases}$$

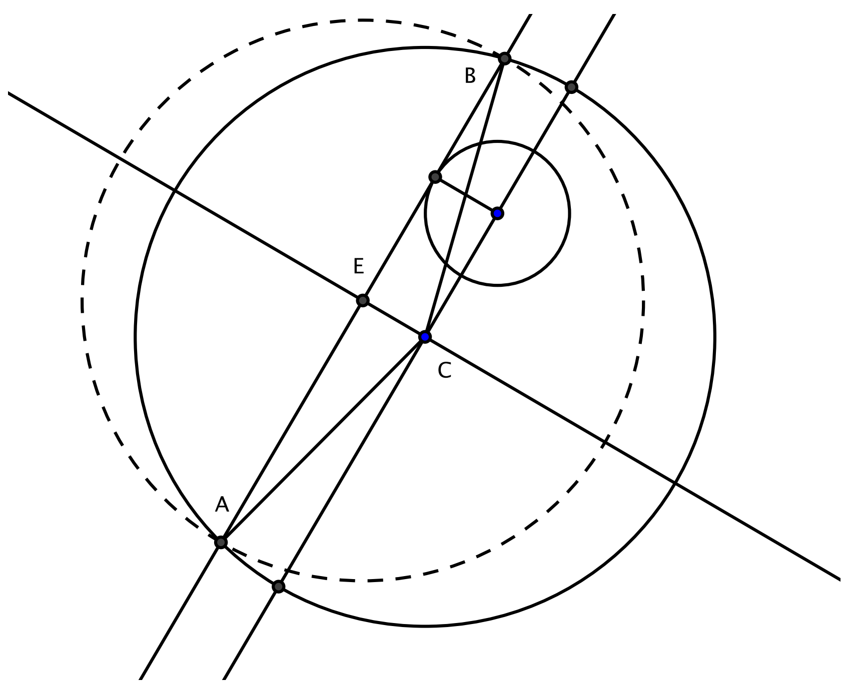
Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{a-y}{y} &= \frac{y}{c-y} \\
\Leftrightarrow y^2 &= (a-y)(c-y) \\
\Leftrightarrow y^2 &= ac-(a+c)y+y^2 \\
\Leftrightarrow y &= \frac{ac}{a+c}.
\end{aligned}$$

Huom. Tässä olisi voinut löytää yhdenmuotoisia kolmioita monella muullakin tavalla...

2. Kaksi ympyrää, joilla on eri keskipisteet, ovat sisäkkäin. Suuremmalle ympyrälle piirretään jänne, joka sivuaa pienempää ympyrää ja on yhdensuuntainen ympyröiden keksipisteiden kautta kulkevan suoran kanssa. Osoita, että ympyröiden väliin jäärvä pinta-ala on yhtä suuri kuin tämä jänne halkaisujana piirretyn ympyrän pinta-ala.

Ratkaisu. Halutaan osoittaa, että isomman ja sisemmän ympyrän pinta-



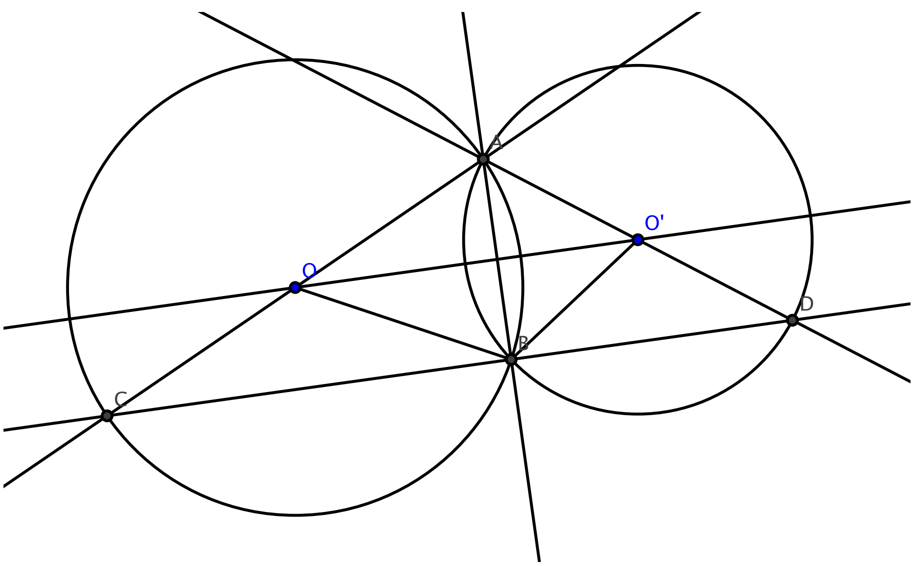
alojen erotus on yhtä suuri kuin ympyrän ala, jonka halkaisija on konstruoitu jänne. Tämä saadaan osoitettua, jos pystytään osoittamaan, että kuvan mukainen halkaisijalle piirretty ison ympyrän keskipisteen kautta kulkeva normaali puolittaa jänteen.

Kuvan kolmio ABC on tasakylkinen (kylkinä isomman ympyrän säde). Suoralle AB piirretty pisteen C kautta kulkeva normaali puolittaa jänteen, sillä kolmio ABC oli tasakylkinen. Lisäksi janan EC pituus on yhtä suuri kuin sisemmän ympyrän säde (suorat yhdensuuntaiset).

Siispä jänne halkaisijana piirretyn ympyrän säde saadaan Pythagoraan lauseen avulla. Laskemalla huomataan, että ala on todellakin sama kuin isomman ja sisemmän ympyrän alojen erotus.

3. Kaksi ympyrää leikkaa toisensa pisteissä A ja B. Pisteestä A piirretään molempiin ympyröihin halkaisijat AC ja AD. Osoita, että pisteet B, C ja D ovat samalla suoralla.

Ratkaisu. Väite voidaan todistaa näyttämällä, että kulma $\angle CBD$ on oi-



kokulma. Tähän päädytään esimerkiksi merkitsemällä $\angle AO'B = \alpha$, jolloin $\angle O'AB = 90° - \alpha/2$ ja $\angle O'BA = 90° - \alpha/2$, sillä kolmio $AO'B$ on tasakylkinen. Samoin jos $\angle AOB = \beta$, niin $\angle OAB = 90° - \beta/2$ ja $\angle OBA = 90° - \beta/2$, sillä kolmio AOB on niin ikään tasakylkinen.

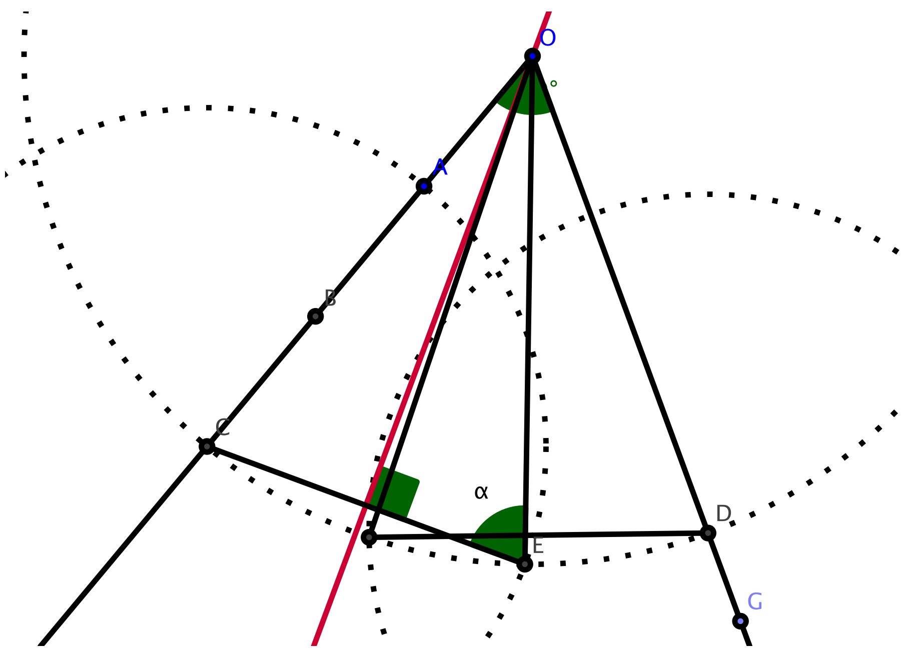
Myös kolmiot COB ja $BO'D$ ovat tasakylkisiä. Lisäksi $\angle AOB + \angle COB = 180°$ ja $\angle AO'B + \angle BO'D = 180°$. Näin saadaan laskemalla kulmat kulma

$\angle CBD$ oikokulmaksi.

Huom. vielä paljon helpommalla selvitään, kun muistetaan usein koulussa lauseena esitetty tieto, että ympyrän halkaisijalta kehälle piirretty kulma on suora...

4 Kulma AOG on $60°$. (Piste O on sen kärki.) Kyljelle OA merkitään (tässä järjestyksessä) pisteet B ja C niin, että janat OA, AB ja BC ovat yhtä pitkiä. Kyljelle OG merkitään piste D niin, että janat OC ja OD ovat yhtä pitkiä. Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on O ja säteenä jana OC. Pisteiden C ja D väliin jäävälle kaarelle merkitään pisteet E ja F niin, että janat CE ja DF ovat yhtä pitkiä kuin jana OB. Laske kulmat COF, EOF ja FOD.

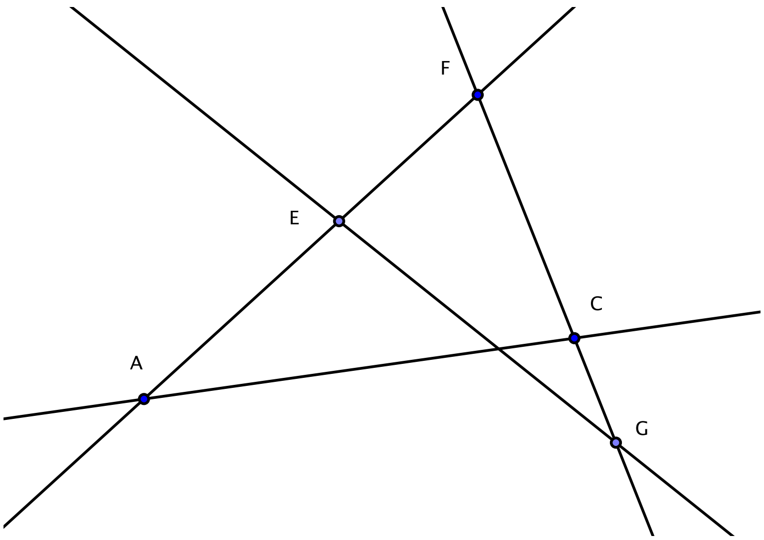
Ratkaisu. Konstruktiossa syntyvät kolmiot COE ja FOD ovat tasakyl-



kisiä. Merkitään niiden kylkien pituutta $3a$:lla. Tällöin, jos kolmioille COE ja FOD piirretään korkeusjanat, saadaan kanta (jonka pituus on $2a$) puolitettua. Nyt kysytyt kulmat saadaan laskettua trigonometristen funktioiden avulla. Kulma α saadaan, sillä $\cos\alpha = 1/3$. Ja näin saadaan kulma $\angle COE$ ja edelleen saadaan myös kulma $\angle EOD$ jne.

5. Tarkista lauseen 1.2.1 todistuksesta sivulla 5, miksi suora GE ei kulje kolmion ACF minkään kärjen kautta.

Ratkaisu. Osoitetaan, että suora GE ei kulje pisteen A kautta. Jos suora



GE kulkee pisteen A kautta, piste G on suoralla $AE = AF$. Mutta piste G oli suoralla FC (joka oli eri suora kuin AF), jolloin olisi oltava $G = F$ (osoitetaan seuraavassa tehtävässä), mikä on ristiriita. Muut tapaukset voidaan käsitellä samoin.

6. Tehtävä 1 sivulta 7.

Ratkaisu. Olkoon eri suorilla a ja b yhteinen piste A. Tehdään vastaoletus: suorilla a ja b on myös toinen yhteinen piste $B \neq A$. Tällöin aksiooman 1 perusteella a ja b ovat sama suora. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, joten eri suorilla voi olla korkeintaan yksi yhteinen piste.

7. Tehtävä 2 sivulta 7.

Ratkaisu. Olkoon AB jana ja olkoon CD sama jana. Oletetaan, että piste C ei ole kumpikaan pisteistä A, B.

- Tapaus 1: Oletetaan, että D on jompikumpi pisteistä A, B.

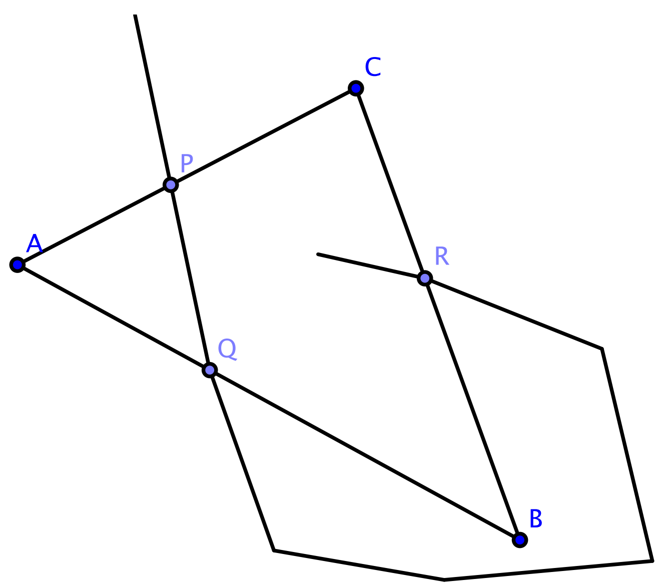
  Jos $A = D$, piste B on A:n ja C:n välissä, koska B on janan $CD = CA$ piste, ja C on A:n ja B:n välissä, koska C on janan AB piste. Tämä on ristiriita aksiooman 5 kanssa, jonka mukaan kolmesta saman suoran pisteestä korkeintaan yksi voi olla kahden muun välissä. Samoin tilanne $D = B$ on mahdoton.

- Tapaus 2: A, B, C ja D ovat eri pisteitä.

  Lauseen 1.2.3 perusteella pisteet A,B,C ja D voidaan asettaa järjestykseen. Tiedämme, että C on janan AB pisteenä A:n ja B:n välissä ja B on janan CD pisteenä C:n ja D:n välissä. Lauseen 1.2.3 perusteella C on janalla AD. Mutta silloin C on A:n ja D:n välissä samoin kuin A on janan CD pisteenä C ja D:n välissä. Tämä on ristiriita aksiooman 5 kanssa.

8. Tehtävä 3 sivulta 7.

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: suora a leikkaa kolmion ABC sivun CA



pisteessä P, sivun AB pisteessä Q ja sivun BC pisteessä R. Lauseen 1.2.2. mukaan pisteistä P, Q, R tasan yksi on kahden muun välissä. Oletetaan, että Q on P :n ja R:n välissä (lopussa huomataan, ettei tällä oletuksella ollut merkitystä). Oletuksen mukaan C ei ole suoralla PR. Siis PRC on kolmio. Suora AB leikkaa tämän kolmion sivun PR. Paschin aksiooman mukaan se leikkaa ainakin toisen sivuista PC ja RC. Oletetaan, että AB leikkaa janan RC (tälläkään ei ole oleellista merkitystä) pisteessä D. Pisteiden B ja D kautta kulkee vain yksi suora, joka on AB. C on suoralla BD, joten C on suoralla AB. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, sillä oletuksen mukaan ABC oli kolmio.