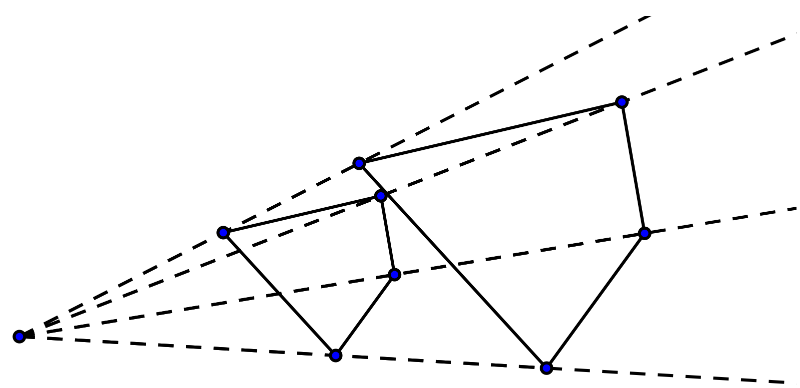
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Geometria 2012
Harjoitus 9
26.3. alkavalle viikolle
Ratkaisuja (Jani Hannula)

1. Väisälän tehtävä 353 sivulta 110. (Piirrettävä mielivaltainen nelikulmio ja sitten sen kanssa yhdenmuotoinen nelikulmio a) mittakaavassa 3 : 5 b) siten, että annetun nelikulmion tietyn sivun vastinsivu on tunnetun janan suuruinen.)

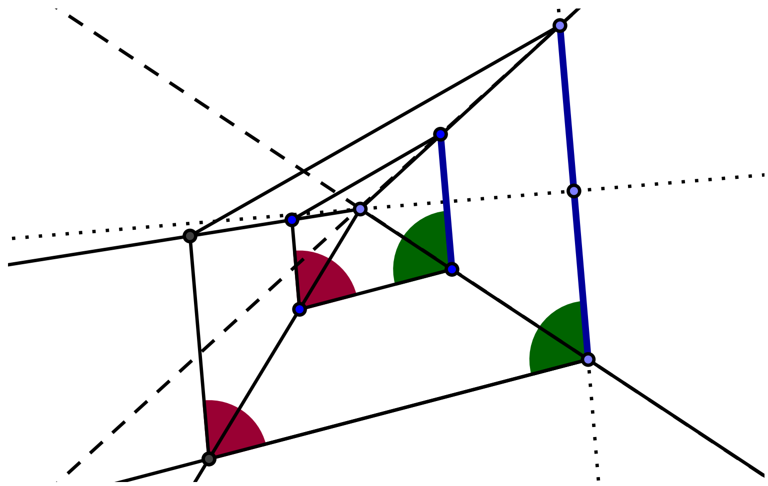
Ratkaisu. a)



- Valitaan mielivaltainen homotetiakeskus. Piirretään puolisuorat annetun nelikulmion kärkipisteiden kautta.
- Jaetaan saadut janat viiteen osaan. (Janan jako viiteen osaan: Piirretään puolisuora ja viiteen osaan jaettavaksi haluttu jana alkamaan samasta pisteestä (mutta ei yhdensuuntaisiksi). Muodostetaan puolisuoralle harpin avulla jana, jossa on viisi samanpituista pätkää. Yhdistetään uuden janan ja annetun janan päätepisteet (eli tehdään kolmio). Siirretään nyt saadun kolmion kulma kaikille uuden janan jakopisteille, jolloin yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan myös annettu jana jaettua viiteen osaan.)

- Nyt haluttu yhdenmuotoinen nelikulmio saadaan, kun homotetiakertoimeksi valitaan 3/5 eli ”kuljetaan” homotetiakeskuksen ja nelikulmion kärjen välisestä janasta 3/5.

b)



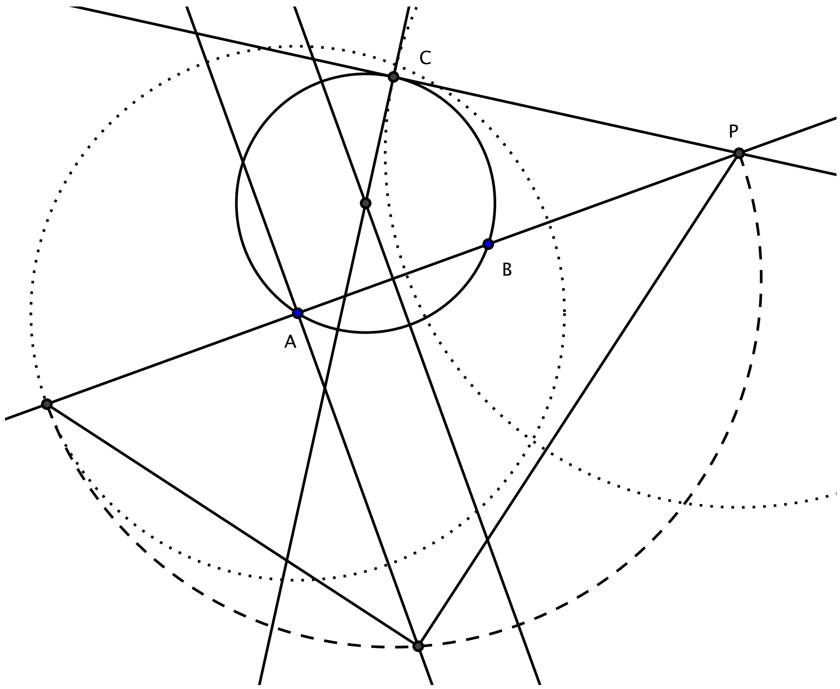
- Siirretään ”tunnettu” jana (kuvassa sinisellä) vastinjanan kanssa yhdensuuntaiselle suoralle. Piirretään suorat, jotka kulkevat janojen päätepisteiden kautta. Näin määräytyy homotetiakeskus.
- Piirrteään homotetiakeskuksesta puolisuorat myös kahden muun nelikulmion kärjen kautta.
- Siirretään venytettävän nelikulmion kulmat yksi kerrallaan syntyvään uuteen nelikulmioon.

2. Johda Heronin kaava.

Ratkaisu. Katso Väisälä s. 124.

3. Väisälän tehtävä 416 sivulta 134. (Piirrettävä ympyrä, joka sivuaa annettua suoraa ja kulkee kahden annetun pisteen kautta.)

Ratkaisu. Olkoon annetut pisteet A ja B. Piirretään näiden kautta suora. Merkitään suoran AB ja annetun suoran leikkauspistettä P:llä. Nyt pisteen



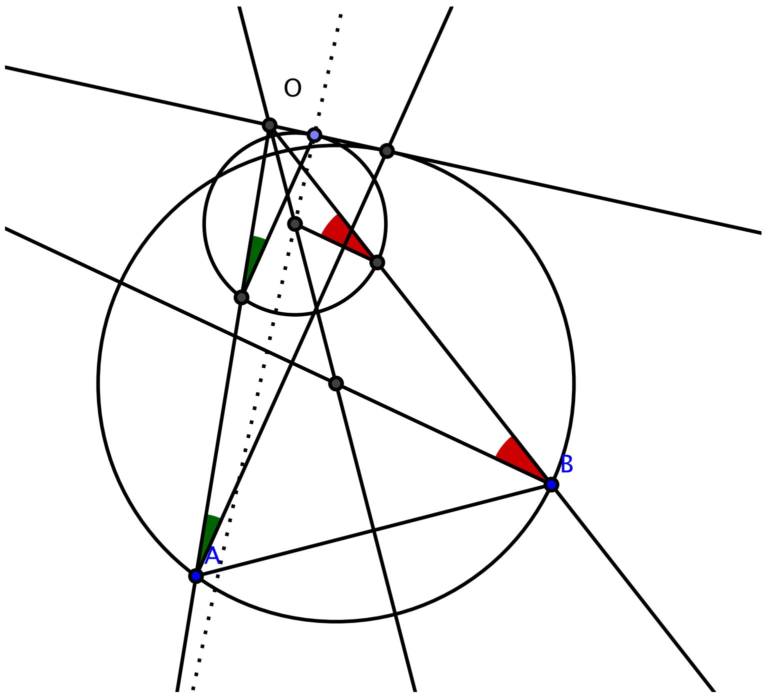
potenssiin nojautuen voidaan todeta, että pisteelle C, jota etsitään annetulta suoralta on pädettävä:

$$PC^2 = PA \cdot PB.$$

Siis janan PC on oltava janojen PA ja PB keskiverto. Tämä osataan konstruioida (ks. harjoitus 8 tehtävä 2): muodostetaan yhdenmuotoiset suorakulmaiset kolmiot, joiden kateetteina ovat janat PA ja PB. Kun piste C on löydetty, löydetään ympyrän keskipiste esimerkiksi annetun suoran normaalin, joka kulkee pisteen C kautta ja janan AB keskinormaalin leikkauspisteestä.

4. Väisälän tehtävä 427 sivulta 135. (Edellinen tehtävä ratkaistava homoteettisuuteen nojautumalla)

Ratkaisu. Olkoon annetut pisteet A ja B. Piirretään janalle AB keskinormaali. Valitaan keskinormaalin ja annetun suoran leikkauspiste homotetiakeskukseksi. Piirretään pieni "apuympyrä" (vrt. harj 6 teht 5.), jonka keskipiste on keskinormaalilla ja joka sivuaa annettua suoraa. Nyt pyritään homotetialla venyttämään apuympyrä sellaiseksi, että se kulkee pisteiden A ja B kautta.



Piirretään homotetiakeskuksesta puolisuorat pisteiden A ja B kautta. Siirretään nyt esimerkiksi kuvassa oleva apuympyrään liittyvä vihreä ja punainen kulma pisteille A ja B. Nyt löydetään suoralta sivuamispiste halutulle ympyrälle (vihreän kulman avulla) ja keskipiste (punaisen kulman avulla). (Huom: keskipiste olisi riittänyt.)

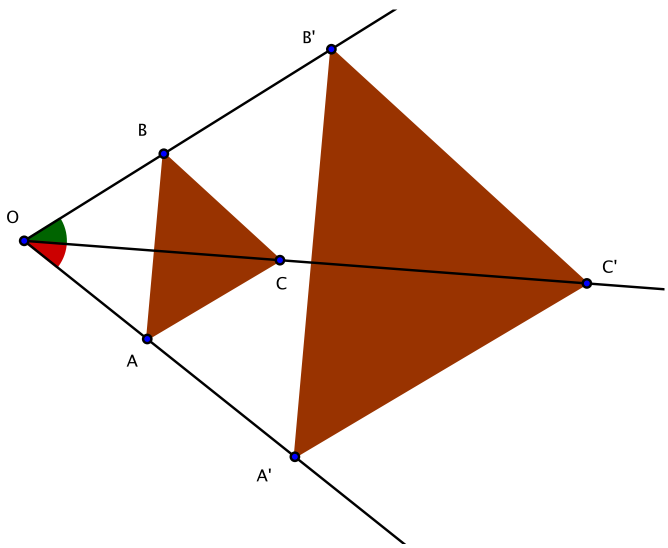
5. Osoita, että homotetia kuvaa kolmion yhdenmuotoiseksi kolmioksi.

Ratkaisu. Olkoon homotetiakeskus O ja kuvattava kolmio ABC ja kärkiä vastaavat kuvat homotetiassa A', B' ja C'. Nyt kolmiot OAB ja $OA'B'$ ovat yhdenmuotoiset (sks). Vastaavasti kolmiot OCB ja $OC'B'$ ovat yhdenmuotoiset (sks) ja kolmiot OCA ja $OC'A'$ ovat yhdenmuotoiset (sks). Siis itse asiassa

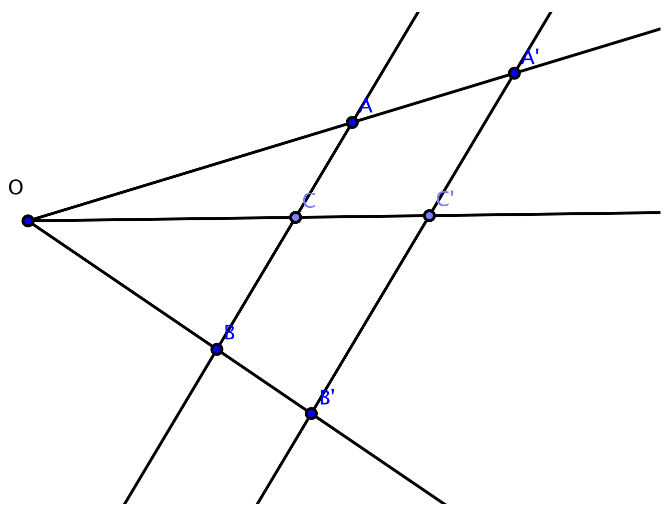
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'},$$

sillä homotetiakerroin k on vakio. Siis kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat yhdenmuotoiset (sss).

6. Osoita, että homotetia kuvaa suoran suoraksi.



Ratkaisu. Olkoon O homotetiakeskus ja kuvattava suora pisteiden A ja

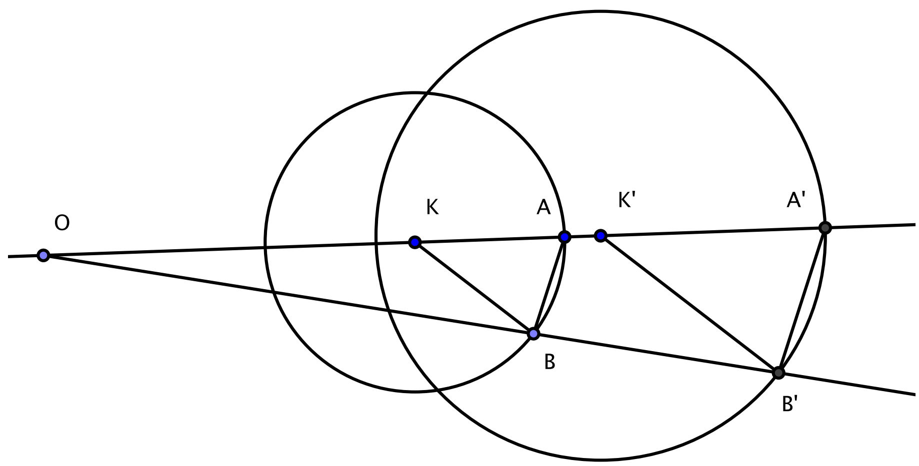


B määräämä suora. Oletetaan, että homotetiakeskus ei ole suoralla AB. Olkoon A' ja B' pisteiden A ja B kuvat homotetiassa. On osoitettava, että jos piste C on suoralla AB, sen kuva C' on suoralla $A'B'$ (ja lisäksi jokainen suoran $A'B'$ piste on jonkin janan AB pisteen kuva). Kolmiot OAB ja $OA'B'$ ovat yhdenmuotoiset (sks). Siis $AB \| A'B'$. Samoin OAC ja $OA'C'$ ovat yhdenmuotoiset (sks) ja siis $AC \| A'C'$. Näin ollen A', B' ja C' ovat samalla suoralla. Lisäksi jokainen suoran $A'B'$ piste on jonkin suoran AB pisteen kuva, sillä jos homotetiakerroin oli k saadaan mikä tahansa suoran $A'B'$ piste kuvattua suoralle AB, jos homotetiakerroin on $1/k$.

(Huom. tapauksessa, jossa homotetiakeskus olisi ollut suoralla AB, myös kaikki kuvapisteet olisivat olleet suoralla AB.)

7. Osoita, että homotetia kuvaa ympyrän ympyräksi.

Ratkaisu. Olkoon homotetiakeskus O, kuvattavan ympyrän keskipiste K

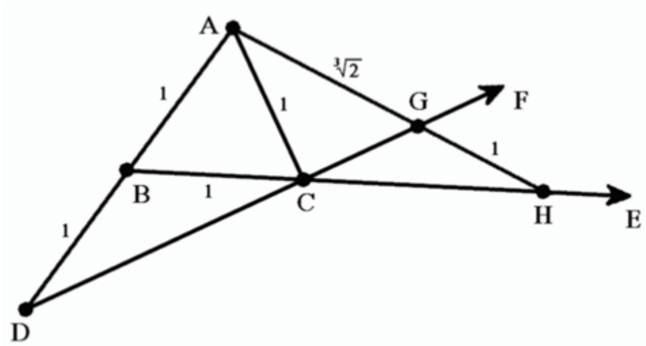


ja piste A ympyrän kehällä kuvan mukaisesti. Pisteet K ja A määräävät ympyrän Γ. Nyt pisteiden K ja A kuvat K' ja A' homotetiassa määräävät ympyrän Γ'. Näytetään, että mikä tahansa piste B, joka on ympyrän Γ kehällä, kuvautuu homotetiassa ympyrälle Γ'. Tämä seuraa yksinkertaisesti siitä, että kolmiot KAB ja $K'A'B'$ ovat yhdenmuotoiset (tehtävä 5). Näin myös saadaan kaikki Γ':n pisteet, sillä jos homotetiakerroin oli k, niin mikä tahansa Γ':n piste kuvautuu vastaavasti Γ:n pisteeksi, kun valitaan homotetiakertoimeksi $1/k$.

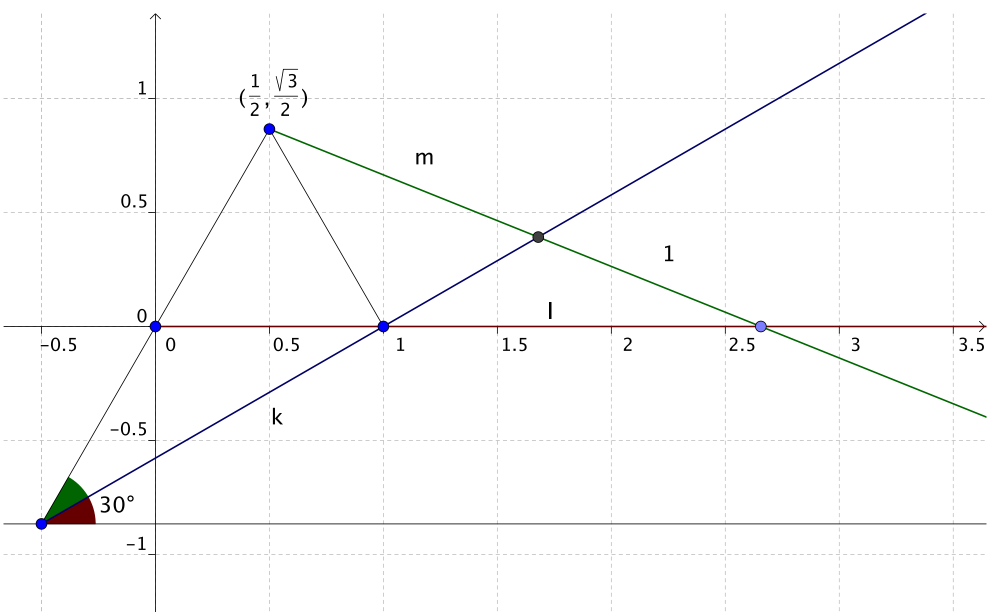
8. Oheinen kuva on piirretty harpilla ja ”räätälöidyllä” viivaimella, johon on merkitty kaksi pistettä, joiden etäisyys on 1. Ensin piirretään tasasivuinen kolmio ABC, jonka sivun pituus on 1. Sitten jatketaan kylkeä AB ja merkitään piste D niin, että janan BD pituus on myös 1. Sitten piirretään suora DC. Tämän jälkeen otetaan merkitty viivain käyttöön: asetetaan se

niin, että piste A on viivaimen merkitsemällä suoralla ja viivaimeen merkityt pisteet osuvat suorille BC ja DC. Näin saadaan pisteet G ja H, joiden välinen etäisyys on 1.

Onko janan AG pituus $\sqrt[3]{2}$, kuten kuvaan on merkitty?



Ratkaisu. Tehtävä ratkeaa analyyttisen geometrian avulla. Laskuista näyt-



täisi tulevan melko sotkuisia asetti kuvion koordinaatistoon miten päin tahansa, joten tyydytään esittelemään ratkaisun idea. Asetetaan kuvio koordinaatistoon kuvan mukaisesti. Nyt punaisella ja sinisellä merkittyjen suorien

(k ja l) yhtälöt saadaan selville ($y = 0$ ja $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$). Jätetään vihreän suoran m kulmakerroin parametriksi (kulkee pisteen $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ kautta) ja ratkaistaan suorien k ja m sekä suorien l ja m leikkauspisteet (kulmakerroin edelleen muuttujana).

Tämän jälkeen ratkaistaan kulmakerroin, kun tiedetään että näiden leikkauspisteiden etäisyys on oltava 1. Nyt tutkittava etäisyys voidaan ratkaista pisteen $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ja suorien k ja m leikkauspisteen välisenä etäisyytenä.