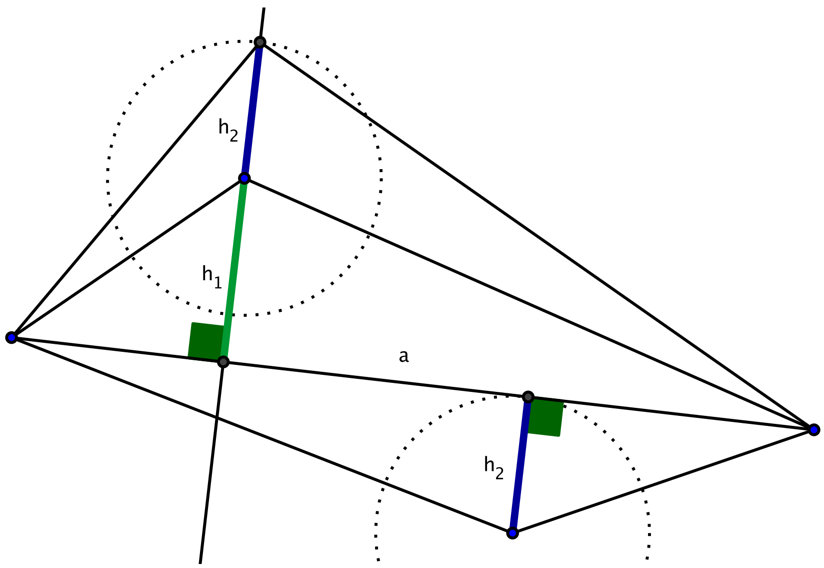
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Geometria 2012
Harjoitus 8
19.3. alkavalle viikolle
Ratkaisuja (Jani Hannula)

1. Oletetaan, että $ABCD$ on nelikulmio. Piirrä harpin ja viivaimen avulla kolmio EFG, jolla on sama pinta-ala.

Ratkaisu.

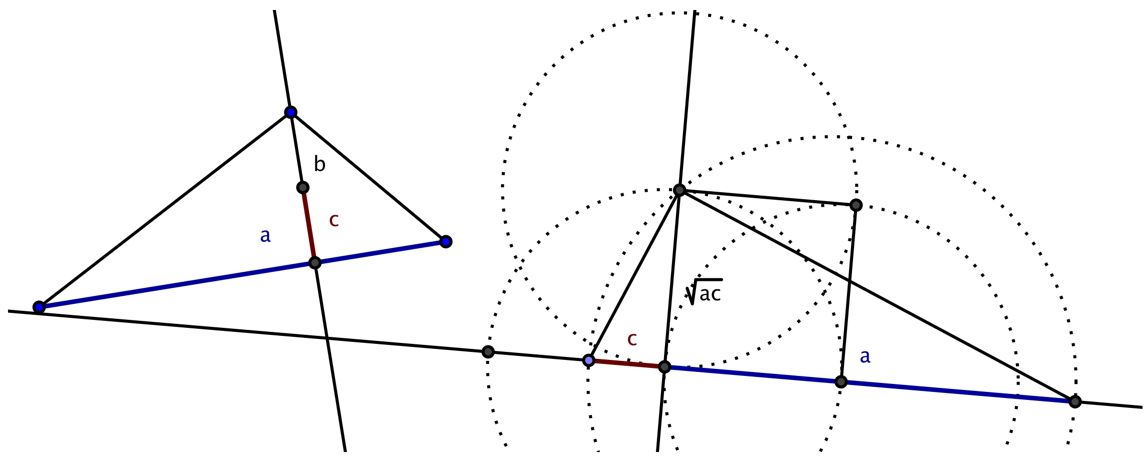


- Piirretään nelikulmiolle lävistäjä a.
- Piirretään syntyville kahdelle kolmiolle korkeusjanat h_1 ja h_2. (Konstroimalla normaalit lävistäjälle a.)
- Siirretään toinen korkeusjanoista toiselle normaalille kuvan mukaisesti.
- Nyt syntyvän kolmion pinta-ala on haluttu, sillä

$$\frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \frac{a(h_1 + h_2)}{2}.$$

2. Oletetaan, että ABC on kolmio. Piirrä harpin ja viivaimen avulla neliö $DEFG$, jolla on sama pinta-ala.

Ratkaisu.



- Piirretään kolmiolle korkeusjana. Kolmion pinta-ala on (kuvan merkinnöin) $ab/2$.

- Haetaan korkeusjanan keskipiste (konstruoimalla keskinormaali). Merkitään $b/2 = c$, jolloin kolmion pinta-ala on siis ac. Etsitään siis sellaista neliön sivua x, jolle pätee $x^2 = ac$.

- Siirretään janat a ja c samalle suoralle kuvan mukaisesti. Konstruoidaan suorakulmainen kolmio kuvan mukaisesti.

- Jo aiemmista harjoituksista on tuttua, että nyt syntyy yhdenmuotoisia kolmioita ja kuvaan piirretyn korkeusjanan pituus todellakin on $\sqrt{ac}$ yhdenmuotoisuuden perusteella. Tämä huomataan, jos merkitään korkeutta h:lla ja kirjoitetaan yhdenmuotoisuudesta seuraava tieto:

$$\frac{h}{c} = \frac{a}{h} \Rightarrow h^2 = ac.$$

- Siispä neliö saadaan ottamalla kyseinen korkeusjana sivuksi.

3. (a) Jaa harpin ja viivaimen avulla annettu jana jatkuvaan suhteeseen eli kultaisen leikkauksen suhteeseen.

(b) Jos janan pituus on a ja jana on jaettu jatkuvaan suhteeseen, niin kuinka pitkiä ovat osat?

Ratkaisu.

(b) Jana on jaettu jatkuvaan suhteeseen eli kultaiseen leikkaukseen jos pätee

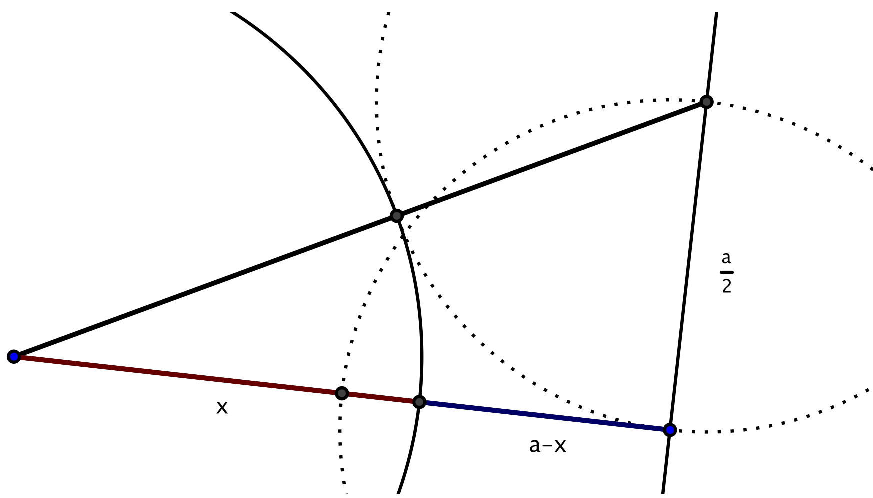
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x},$$

missä a on koko janan pituus ja missä x ja $x - a$ ovat janan osien pituudet. Tämä tarkoittaa siis, että on oltava

$$x^2 + ax - a^2 = 0. \tag{1}$$

Kun yhtälöstä (1) ratkaistaan positiivinen juuri, saadaan $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, jolloin toiseksi osaksi jää $a - x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$.

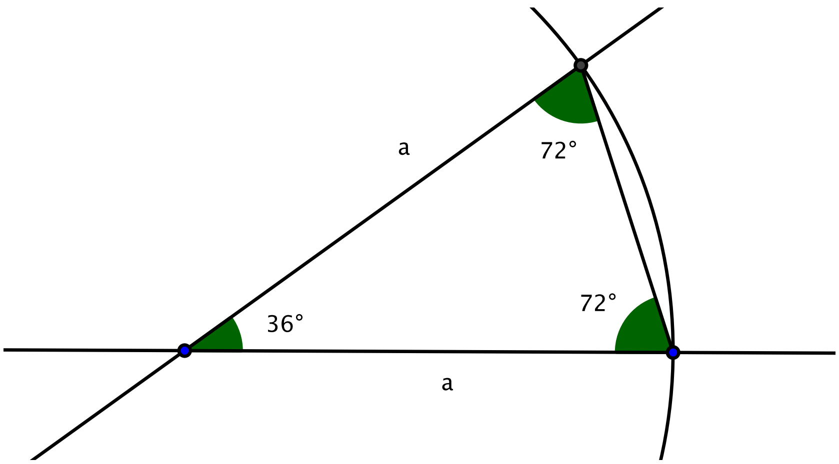
(a) Kuvan konstruktiossa konstruoidaan janan, jonka pituus on a pääte-



pisteeseen suora kulma (konstruoidaan suoralle normaali) ja erotetaan normaalista jana, jonka pituus on $a/2$. Piirretään hypotenuusa ja erotetaan siitä jana, jonka pituus on $a/2$. Siirretään jäljelle jäävä osa hypotenuusasta alkuperäiselle janalle. Nyt Pythagoraan lauseen avulla voidaan todeta, että saatu jako on haluttu (eli toteuttaa (b) -kohdan vaatimuksen). (Kyse on siitä, että hypotenuusan pituus on $\frac{\sqrt{5}}{2}$.)

4. Oletetaan, että ympyrän säde on a. Määritä ympyrän sisälle piirretyn säännöllisen 10-kulmion sivun pituus.

Ratkaisu. Säännölisen 10-kulmion voidaan ajatella koostuvan kuvan mu-



kaisista kolmioista. Olkoon 10-kulmion sivun pituus x. Jos katsotaan jostakin taulukosta trigonometristen funktioiden tarkkoja arvoja, saadaan $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$ (koska on esimerkiksi oltava $\cos 72° = \frac{x/2}{a}$). Mistä tämä oikeastaan johtuu? K. Väisälän Geometrian sivulla 129 on tähän vastaus: kun 72° kulma puolitetaan, syntyy yhdenmuotoisia tasakylkisiä kolmioita, joista saadaan tämä tulos.

5. Selvitä, miten harpilla ja viivaimella piirretään säännöllinen 10-kulmio.

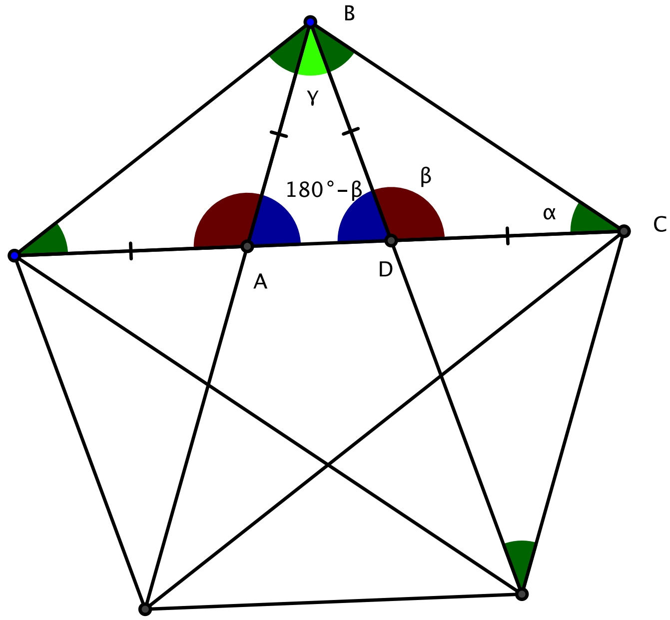
Ratkaisu. Edellisessä tehtävässä huomattiin, että säännöllisen 10-kulmion sivun pituus on sama, kuin säteen pidemmän osan, kun säde on jaettu jatkuvassa suhteessa. Siispä konstruoidaan (esim. tehtävän 3a tavalla) säteelle kultainen leikkaus ja siirretään syntyvä pienempi jana ympyrän jänteeksi ja tehdään vielä yhdeksän samanpituista jännettä lisää.

6. Selvitä, miten harpilla ja viivaimella piirretään säännöllinen 5-kulmio.

Ratkaisu. Konstruoidaan säännöllinen 10-kulmio ja yhdistetään joka toinen kärki toisiinsa.

7. Tehtävä 400 Väisälän sivulla 129. (Kun säännölliseen viisikulmioon piirretään kaikki lävistäjät niin, muodostuu toinen säännöllinen viisikulmio. On näytettävä, että sen sivu = alkuperäisen viisikulmion sivun pienempi osa, kun sivu on jaettu jatkuvaan suhteeseen.)

Ratkaisu. Kuvassa näkyvät vihreät kulmat ovat yhtä suuret, sillä lävis-



täjän ja 5-kulmion sivujen muodostama kolmio on tasakylkinen. Siispä myös kolmiot, joissa on punaiset kulmat ovat tasakylkisiä. Ja täten edelleen myös kolmio, jossa on siniset kulmat on tasakylkinen.

Tämä pohdiskelu tähtää siihen, että pyritään näyttämään, että $\gamma = \alpha$, jolloin kolmiot ADB ja BAC ovat yhdenmuotoiset (kk). Tämä pystytään näyttämään sillä säännöllisen 5-kulmion kulmien suuruus on $108°$. (Tämän voi todeta katselemalla tehtävän 4 kuvan kaltaisia kolmioita.) Tästä seuraa, että on oltava $\alpha = 36°$, sillä pitää olla $2\alpha + 108° = 180°$. Toisaalta on oltava $2\alpha + \gamma = 108°$, joten on oltava myös $\gamma = 36°$.

Siis myös kolmio BAC on tasakylkinen ja $\triangle ADB \sim \triangle BAC$. Nyt saadaan yhdenmuotoisuuden perusteella:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{AB}{AD},$$

mikä oli itse asiassa todistettava.

8. Maanantain luennolla merkittiin

$$K[\sqrt(k)] = \{a + b\sqrt{k} \mid a \in K \text{ ja } b \in K\}$$

ja liitettiin tämän ”kuntalaajennuksen toistaminen harppi-viivainkonstruktioihin.

Onko

$$(\mathbb{Q}[\sqrt(2)])[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

(Tässä $\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko.) Vihje: kuuluuko $\sqrt{6}$ vasemmanpuoleiseen joukkoon? Entä oikeanpuoleiseen?

Ratkaisu. Vihje antaa ymmärtää, että väite ei päde ja että $\sqrt{6}$ olisi eräs luku, joka kuuluu toiseen joukkoon, muttei toiseen. Näytetään, että $\sqrt{6}$ kuuluu vasemmanpuoleiseen joukkoon, muttei oikeanpuoleiseen.

Luvut 0 ja $\sqrt{2}$ kuuluvat joukkoon $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sillä:

$$0 = 0 + 0\sqrt{2} \quad \text{ja} \quad \sqrt{2} = 0 + 1\sqrt{2}.$$

Luku $\sqrt{6}$ kuuluu näin ollen joukkoon $(\mathbb{Q}[\sqrt(2)])[\sqrt{3}]$ sillä:

$$\sqrt{6} = 0 + \sqrt{2}\sqrt{3}.$$

Jos $\sqrt{6}$ kuuluisi myös oikeanpuoleiseen joukkoon, olisi oltava sellaiset $a, b, c \in \mathbb{Q}$, että:

$$\sqrt{6} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}.$$

Kirjoitetaan tämä väite hieman toisessa muodossa ja johdetaan ristiriita. Äskeinen tarkoittaa, että on oltava sellaiset $d, e, f \in \mathbb{Q}$, että

$$\begin{aligned} \sqrt{6} + f\sqrt{3} &= d + e\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2} + f)\sqrt{3} &= d + e\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} &= \frac{d + e\sqrt{2}}{\sqrt{2} + f}. \end{aligned}$$

Alkuperäinen väitteemme on siis yhtäpitävää sen kanssa, että $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Tämä tarkoittaa, että on oltava sellaiset $g, h \in \mathbb{Q}$, että

$$\sqrt{3} = g + h\sqrt{2}.$$

Jatketaan ristiriidan metsästystä:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= g + h\sqrt{2} \\ \Rightarrow 3 &= g^2 + 2gh\sqrt{2} + 2h^2. \end{aligned}$$

Jos $gh \neq 0$, voidaan äskeinen yhtälö jakaa gh:lla ja näin päädytään tilanteeseen, että on oltava $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, mikä on ristiriita. Käydään siis vielä läpi tilanteet $g = 0$ ja $h = 0$.

Jos $h = 0$, saadaan $g = \sqrt{3}$, mikä tarkoittaa että $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, mikä on ristiriita.

Jos $g = 0$ käytetään tietoa, että koska h oli rationaaliluku se voidaan ilmaista muodossa p/q, missä $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ ja p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä (ts. murtolukuesitys on loppuun asti supistettu). Nyt saadaan:

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{p^2}{q^2} \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 3q^2 &= 2p^2. \end{aligned}$$

Nyt on oltava luvun $2p^2$ jaollinen kolmella, mikä tarkoittaa, että myös luvun p on oltava jaollinen kolmella. Siis voidaan kirjoittaa $p = 3r$, jollakin $r \in \mathbb{Z}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} 3q^2 &= 2p^2 \\ \Rightarrow 3q^2 &= 2(3r \cdot 3r) \\ \Leftrightarrow q^2 &= 2 \cdot 3r, \end{aligned}$$

mikä tarkoittaa, että q^2 on jaollinen kolmella, josta seuraa, että myös q on jaollinen kolmella. Nyt saatiin ristiriita sen kanssa, että p:llä ja q:lla ei ollut yhteisiä tekijöitä.