MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Geometria 2012
Harjoitus 7
12.3. alkavalle viikolle
Ratkaisuja (Jani Hannula)

1. Säännöllisen tetraedrin särmä on a. Pallo, jonka säde on r sivuaa tetraedrin jokaista tahkoa. Tetraedrin kärjet ovat sellaisen pallon pinnalla, jonka säde on R.
(a) Määritä r;
(b) määritä R.
(c) Suunnittele (toteuta) havaintovälineitä tehtävän helpottamiseksi.

Ratkaisu. a) Aikaisemmissa harjoituksissa on todistettu useita säännölliseen tetraedriin liittyviä tuloksia. On opittu, että säännöllisen tetraedrin, jonka särmä on a korkeusjana (kun tetraedria ajatellaan kartiona) on $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. Lisäksi on huomattu, että korkeusjana osuu pohjatahkon mediaanien (eli keskijanojen) leikkauspisteeseen. Toisaalta todistettiin, että tetraedrin kärjestä vastaisen tahkon keskijanojen leikkauspisteeseen vedetyt janat (jotka ovat siis tässä tapauksessa myös korkeusjanoja) leikkaavat samassa pisteessä, ja ne jakavat toisensa suhteessa $3:1$ (kärjestä lukien).

Näin ollen huomataankin, että tetraedrin sisällä oleva piste, josta etäisyys jokaiseen tahkoon on sama, on korkeusjanojen leikkauspiste ja saadaan:

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

b) Vastaavasti saadaan:

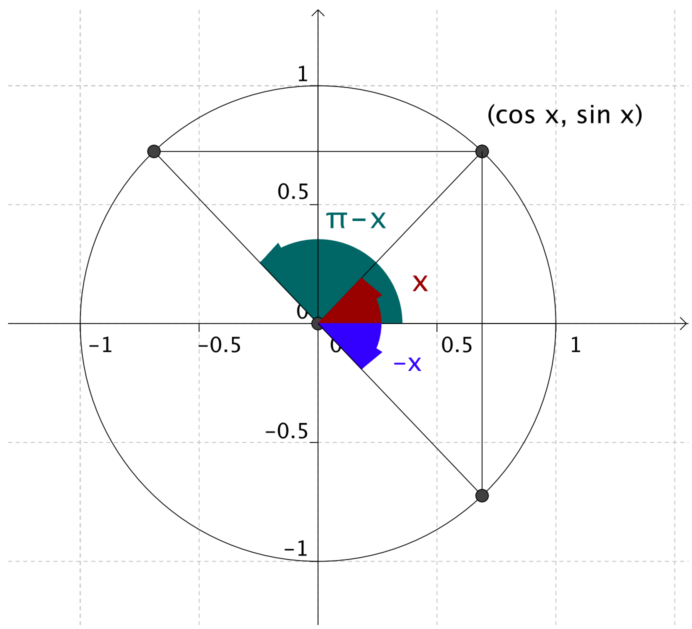
$$R = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

c) Käy Origo-luokassa (C322) ihmettelemässä sinne kasattua säännöllistä tetraedria!

2. Ratkaise yhtälö
(a) $\sin 2x = \sin x$;

(b) $\sin 2x = -\sin x$.

Ratkaisu. Muistutellaan aluksi mieleen yksikköympyrää ja (koulumaail-



massa esiintyviä) tietoja sini- ja kosinifunktioista. Sinifunktiolle pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, että $\sin(x) = \sin(x + 2\pi n)$, mutta myös $\sin(x) = \sin(\pi - x + 2\pi n)$ (katso kuvaa). Kosinifunktiolle taas pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, että $\cos(x) = \cos(x + 2\pi n)$, mutta myös $\cos(x) = \cos(-x + 2\pi n)$.

a) Käytetään äskeisiä tietoja:

$$\begin{aligned} \sin 2x \quad &= \quad \sin x \\ \Leftrightarrow 2x = x + 2\pi n \qquad &\text{tai} \qquad 2x = \pi - x + 2\pi n \\ \Leftrightarrow x = 2\pi n \qquad &\text{tai} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, \end{aligned}$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

b) Tämä voitaisiin ratkaista samantapaisesti kuin edellinen, mutta tehdään hieman eri tyylillä:

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= -\sin x \\
\Leftrightarrow 2\sin x\cos x &= -\sin x \\
\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + \sin x &= 0 \\
\Leftrightarrow \sin x(2\cos x + 1) &= 0 \\
\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad &\text{tai} \quad 2\cos x + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad &\text{tai} \quad \cos x = -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow x = \pi n \quad &\text{tai} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.
\end{aligned}$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

3. Ratkaise yhtälö $2\sin^2 x - \sin x = 0$.

Ratkaisu. Merkitään $\sin x = t$. Nyt

$$\begin{aligned}
2\sin^2 x - \sin x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2t^2 - t = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t(2t-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \text{tai} \quad 2t - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \text{tai} \quad \sin x = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad x = n\pi \quad \text{tai} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{tai} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,
\end{aligned}$$

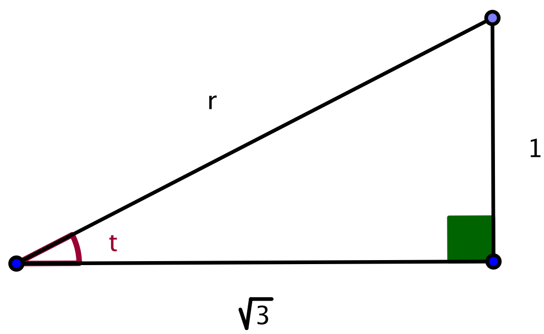
missä $n \in \mathbb{Z}$.

4. Ratkaise yhtälö $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$. Kannattaa ottaa käyttöön apumuuttujat r ja t ja "sijoittaa" $1 = r\sin t$ ja $\sqrt{3} = r\cos t$.

Ratkaisu. Toimitaan ohjeen mukaisesti: sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön $1 = r\sin t$ ja $\sqrt{3} = r\cos t$. Mietitään ennen sitä kuitenkin mitä tämä tarkoittaa. Ehdoista $1 = r\sin t$ ja $\sqrt{3} = r\cos t$ seuraa, että on oltava

$$\begin{cases} \sin t = 1/r \\ \cos t = \sqrt{3}/r. \end{cases}$$

Tämän hahmottamiseksi auttanee oheinen kuva. On siis oltava $r = 2$ ja



$t = \pi/6$. (Tai oikeastaan $t = \pi/6 + 2\pi n$.) [1] Sijoittamalla saadaan:

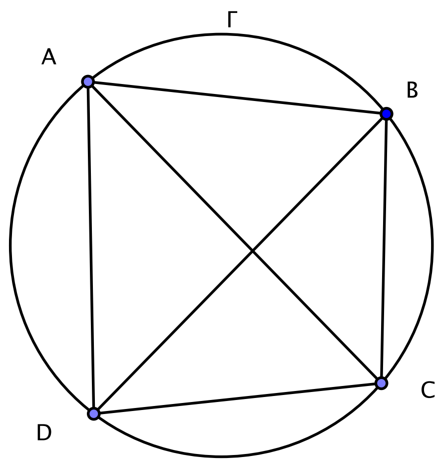
$$\begin{aligned}
\sin x + \sqrt{3}\cos x &= 1 \\
\Leftrightarrow r\sin t \sin x + r\cos t\cos x &= 1 \\
\Leftrightarrow r(\cos x\cos t + \sin x\sin t) &= 1 \\
\Leftrightarrow r\cos(x-t) &= 1 \\
\Leftrightarrow \cos(x-t) &= \frac{1}{r} \\
\Leftrightarrow \cos(x-\frac{\pi}{6}) &= \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} + 2\pi n \qquad &\text{tai} \qquad x - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6} + 2\pi n \\
\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad &\text{tai} \qquad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,
\end{aligned}$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

5. Tehtävä 35 sivulla 20. (Osoita: Jos $ABCD$ on jännenelikulmio, niin $\angle ABC$ ja $\angle CDA$ ovat vieruskulmia.)

Ratkaisu. Se, että $ABCD$ on jännenelikulmio tarkoittaa, että on olemassa sellainen ympyrä Γ, että $A, B, C, D \in \Gamma$. Tilanne on siis oheisen kuvan mukainen. Lauseen 1.6.8. (kehäkulmalause) perusteella:

[1] Oikeasti ratkaisuksi kelpaa myös $r = -2$ ja $t = \frac{7\pi}{6}$, mutta tämä päätyy lopulta samaan tulokseen.



$$\angle ACB \cong \angle ADB \quad \text{ja} \quad \angle BAC \cong \angle BDC. \tag{1}$$

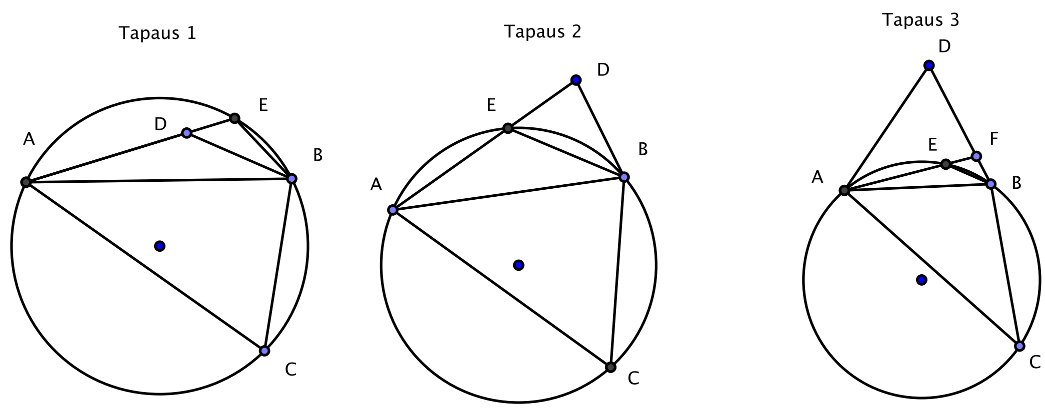
Lauseen 1.5.4. (”kolmion kulman vieruskulman on oltava yhtä suuri kolmion kahden muun kulman summan kanssa”) perusteella kulman $\angle ABC$ vieruskulman on oltava yhtenevä kulman $\angle BAC + \angle ACB$ kanssa. Nyt siis kohdan (1) perusteella kulman $\angle ABC$ vieruskulman on oltava yhtenevä kulman $\angle BDC + \angle ADB$ kanssa. Mutta kulma $\angle CDA$ on yhtenevä tämän kanssa. Siispä kulmat $\angle ABC$ ja $\angle CDA$ ovat vieruskulmia.

6. Tehtävä 36 sivulla 20. (Osoita: Jos C ja D ovat eri puolella suoraa AB ja kulmat $\angle ACB$ ja $\angle ADB$ ovat toistensa vieruskulmia, niin A, B, C ja D ovat samalla ympyrällä.)

Ratkaisu. Lähdetään liikkeelle tiedosta, että kolmion kärkipisteiden kautta voidaan aina piirtää yksikäsitteinen ympyrä. Olkoon siis Γ sellainen ympyrä, että $A, B, C \in \Gamma$. Pyritään näyttämään, että oletuksista seuraa, että myös $D \in \Gamma$.

Näytetään, että jos $D \notin \Gamma$ päädytään ristiriitaan. Jos $D \notin \Gamma$, vaihtoehtoja on kaksi: joko D on ympyrän Γ sisäpuolella tai D on ympyrän Γ ulkopuolella.

Oletetaan aluksi, että piste D on ympyrän Γ sisäpuolella (oheisen kuvan ”Tapaus 1”). Tällöin edellisen tehtävän perusteella $\angle ACB$ ja $\angle BEA$ ovat vieruskulmia. Lisäksi oletuksen mukaan $\angle ADB$ ja $\angle ACB$ olivat vieruskul-



mia. Siis on oltava $\angle ADB \cong \angle BEA$. Mutta tämä on ristiriita, sillä kulman $\angle EDB$ vieruskulman (joka on $\angle ADB$, joka on yhtenevä kulman $\angle BEA$ kanssa) tulisi lauseen 1.4.10 perusteella olla suurempi kuin kulma $\angle BED$.

Oletetaan sitten, että D on ympyrän Γ ulkopuolella ja että jompikumpi janoista AD ja BD leikkaa ympyrän Γ (kuvan "Tapaus 2"). Tällöin ristiriita voidaan johtaa täsmälleen samaan tapaan kuin äsken (katso kuvaa!).

Oletetaan, että D on ympyrän Γ ulkopuolella ja että kumpikaan janoista AD ja BD ei leikkaa ympyrää Γ (kuvan "Tapaus 3"). Olkoon E ja F sellaiset pisteet, että F on D:n ja B:n välissä ja että jana AF leikkaa Γ:n pisteessä E. Lauseen 1.4.10 ("kolmion kulman vieruskulma on kolmion muita kulmia suurempi") perusteella:

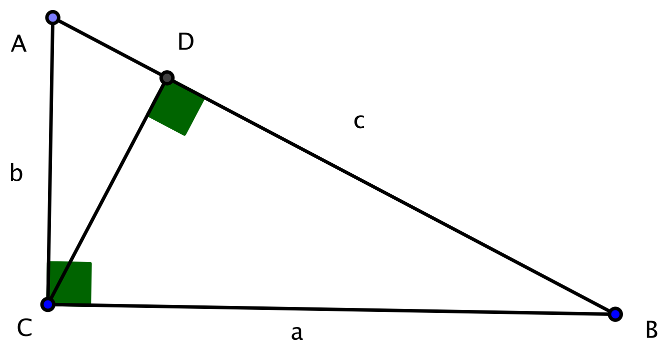
$$\angle ADF < \angle EFB < \angle AEB. \tag{2}$$

Vastaavasti kuin muissa tapauksissa, edellisen tehtävän perusteella kulmat $\angle AEB$ ja $\angle ACB$ ovat vieruskulmia ja kulmat $\angle ADB$ ja $\angle ACB$ ovat vieruskulmia oletuksen mukaan. Taaskin siis pätee $\angle AEB \cong \angle ADB$. Mutta tämä on ristiriita kohdan (2) kanssa!

7. Tehtävä 43 sivulla 25. (Todista, että jos ABC on suorakulmainen kolmio ja kulma $\angle BCA$ on suora kulma, niin $a^2 + b^2 = c^2$.)

Ratkaisu. Käytetään oheisen kuvan mukaisia merkintöjä kolmion sivuille

(Eulerin notaatio). Valitaan janalta AB $(= c)$ piste D siten, että $CD \perp AB$.



Nyt kolmiot DBC ja CBA ovat yhdenmuotoisia (kk). Näin ollen

$$\frac{DB}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = c \cdot DB.$$

Vastaavasti kolmiot DAC ja CAB ovat yhdenmuotoisia (kk), joten

$$\frac{AD}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = c \cdot AD.$$

Koska D oli janalla AB, pätee $AD + DB = c$. Nyt saadaan

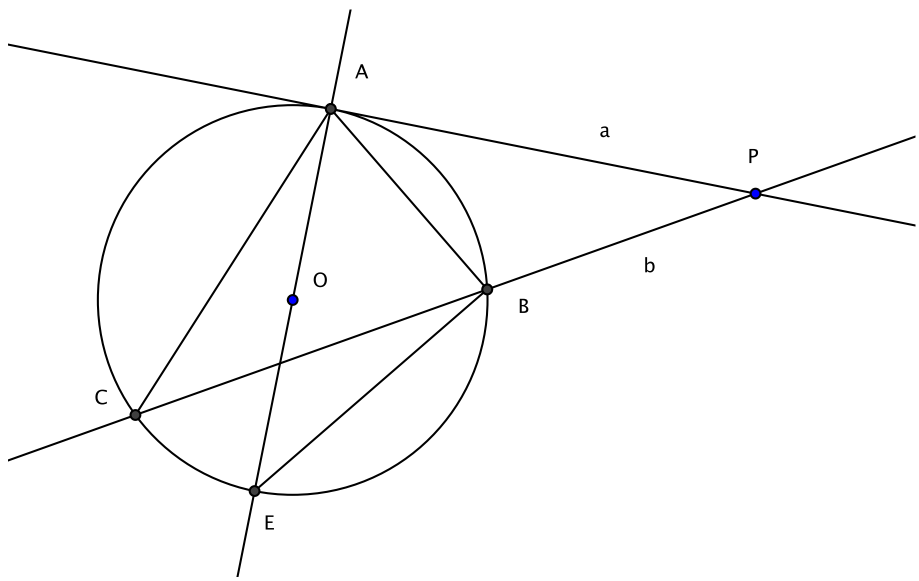
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c \cdot DB + c \cdot AD \\ &\overset{*}{=} c(DB + AD) \\ &= c^2, \end{aligned}$$

mikä oli todistettava. (Kohdassa * käytettiin osittelulakia janojen laskutoimituksille, joka on harjoitustehtävä 39.)

8. Tehtävä 45 sivulla 26. (Suora a sivuaa ympyrää Γ pisteessä A, suora b leikkaa Γ:n pisteissä B ja C. a ja b leikkaavat pisteessä P. Osoita, että $PA^2 = PB \cdot PC$.)

Ratkaisu. Oletetaan, että piste B on P:n ja C:n välissä. Kohta huomataan, että tällä järjestyksellä ei ole merkitystä. Näyttää siltä, että väite saadaan todistettua yhdenmuotoisten kolmioiden avulla sillä:

$$\frac{CP}{AP} = \frac{AP}{BP} \Rightarrow PA^2 = PB \cdot PC.$$



Pyritään siis näyttämään, että kolmiot $\triangle PAB$ ja $\triangle PCA$ ovat yhdenmuotoiset. Koska $\angle APB \cong \angle APC$ riittää osoittaa $\angle ACP \cong \angle BAP$, sillä tällöin yhdenmuotoisuus on todistettu (kk).

Näytetään siis $\angle ACP \cong \angle BAP$. Olkoon E se ympyrän Γ piste, joka on suoralla AO. Tällöin ensinnäkin kulma $\angle EAP$ on suora (suora a oli ympyrän Γ tangentti) ja myös kulma $\angle EBA$ on suora (Thaleen lause, monisteessa 1.6.7). Lisäksi lauseen lauseen 1.6.8. (kehäkulmalause) perusteella $\angle AEB \cong \angle ACB$. Muistetaan, että suoran kulman määritelmän mukaan suoran kulman vieruskulma on suora. Näin ollen lauseen 1.5.4. perusteella kulman $\angle AEB + \angle EAB$ on oltava suora. Mutta niin on oltava myös kulman $\angle EAB + \angle BAP$. Siispä on oltava $\angle BAP \cong \angle AEB \cong \angle ACB \cong \angle ACP$.