MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

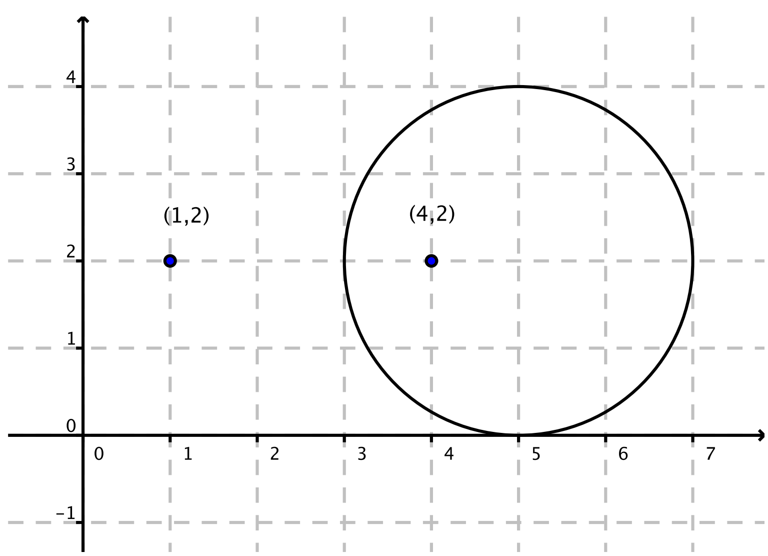
Geometria 2012
Harjoitus 12
23.4. alkavalle viikolle
Ratkaisuja (Jani Hannula)

1. Johda yhtälö niiden pisteiden (x, y) joukolle, joiden etäisyys pisteestä $(1, 2)$ on kaksi kertaa niin suuri kuin pisteestä $(4, 2)$. Tulos liittyy Apolloniuksen ympyrään, josta on puhetta mm. Väisälän Geometriassa.

Ratkaisu. Johdetaan yhtälö annetusta ehdosta:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} &= 2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \\
\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 &= 4((x-4)^2+(y-2)^2) \\
\Leftrightarrow 4(x-4)^2-(x-1)^2+3(y-2)^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow 3x^2-30x+63+3(y-2)^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow 3(x^2-10x+25)-12+3(y-2)^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow 3(x-5)^2+3(y-2)^2 &= 12 \\
\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-2)^2 &= 2^2.
\end{aligned}$$

Kyseessä on siis ympyrä.

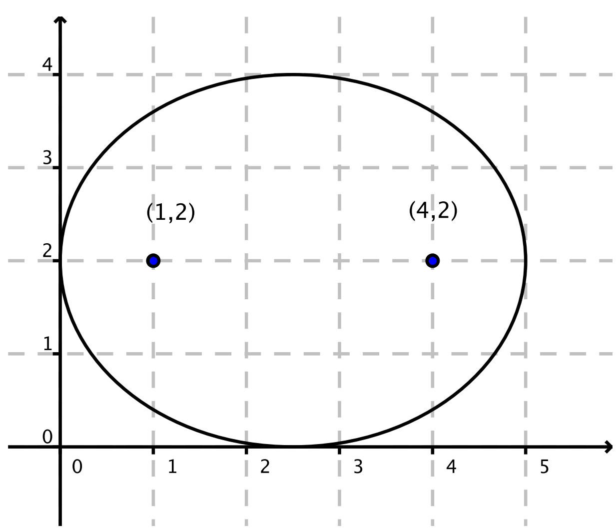


2. Johda yhtälö niiden pisteiden (x, y) joukolle, joiden pisteistä $(1, 2)$ ja $(4, 2)$ laskettujen etäisyyksien summa on 5. Millä nimellä kutsutaan tällaista käyrää?

Ratkaisu. Johdetaan yhtälö annetusta ehdosta:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} &= 5 \\
\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} &= 5-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \\
\Leftrightarrow (x-1)^2-(x-4)^2 &= 25-10\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \\
\Leftrightarrow 6x-15 &= -10\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \\
\Leftrightarrow 5\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} &= 20-3x \\
\Rightarrow 25((x-4)^2+(y-2)^2) &= 400-120x+9x^2 \\
\Leftrightarrow 16x^2-80x+400+25(y-2)^2 &= 400 \\
\Leftrightarrow 16x^2-80x+100+25(y-2)^2 &= 100 \\
\Leftrightarrow (4x-10)^2+25(y-2)^2 &= 100 \\
\Leftrightarrow 16\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+25(y-2)^2 &= 100 \\
\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}}+\frac{(y-2)^2}{4} &= 1.
\end{aligned}$$

Kyseessä on siis ellipsi.

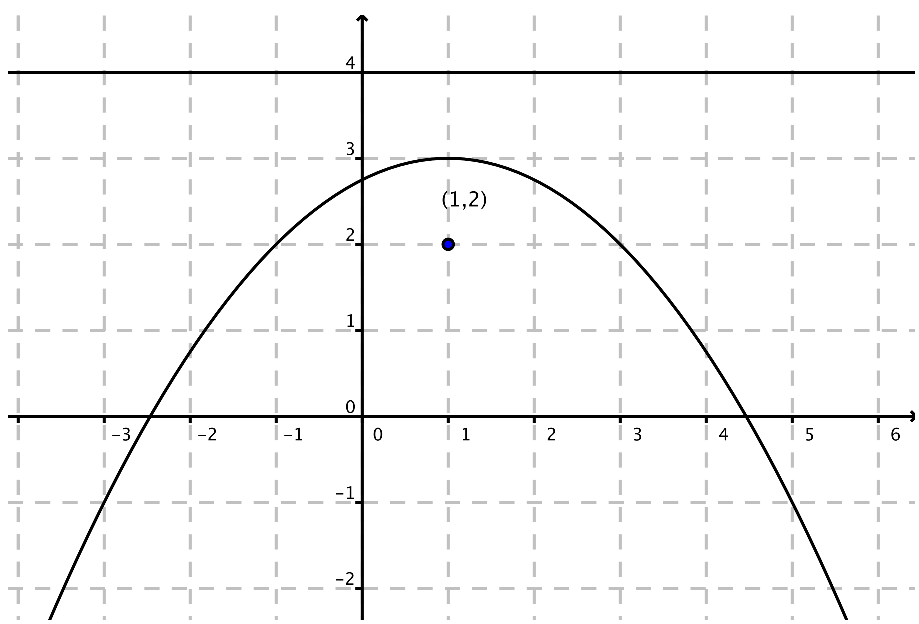


3. Johda yhtälö niiden pisteiden (x, y) joukolle, joiden etäisyys pisteestä $(1, 2)$ on yhtä suuri kuin suorasta $y = 4$. Millä nimellä kutsutaan tällaista käyrää?

Ratkaisu. Johdetaan yhtälö annetusta ehdosta:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} &= \frac{|y-4|}{\sqrt{1^2}} \\
\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} &= |y-4| \\
\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 &= y^2 - 8y + 16 \\
\Leftrightarrow 2^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= y^2 - 8y + 16 \\
\Leftrightarrow 4y &= -x^2 + 2x + 11 \\
\Leftrightarrow y &= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}.
\end{aligned}
$$

Kyseessä on siis paraabeli.

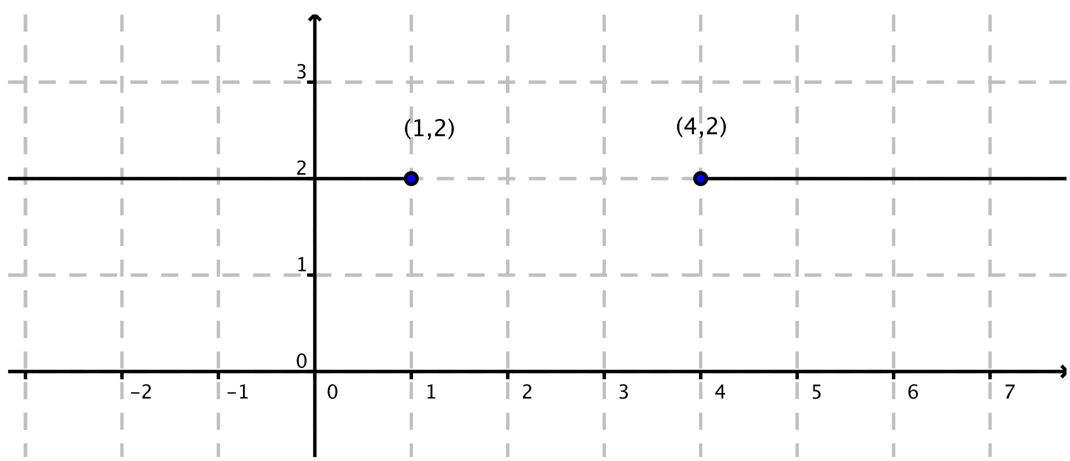


4. Johda yhtälö niiden pisteiden (x, y) joukolle, joiden pisteistä $(1, 2)$ ja $(4, 2)$ laskettujen etäisyyksien erotuksen itseisarvo on (a) 3; (b) 2. Millä nimellä kutsutaan tällaista käyrää?

Ratkaisu. a) Johdetaan yhtälö annetusta ehdosta:

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right| &= 3 \\
\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} &= \pm 3 \\
\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} &\pm 3 \\
\overset{*}{\Rightarrow} (x-1)^2+(y-2)^2 = (x-4)^2+(y-2)^2 \pm 6\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} &+ 9 \\
\Leftrightarrow 6x-24 = \pm 6\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} & \\
\Leftrightarrow x-4 = \pm\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} & \\
\overset{**}{\Rightarrow} (y-2)^2 = 0 & \\
\Leftrightarrow y = 2. &
\end{aligned}$$

Kyseessä on kaksi puolisuoraa, sillä kohdissa (*) ja (**) pätee vain implikaatio. Tapauksessa ”-3” on oltava $x-4 \leq -3$ tai $x-4 \geq 3$ eli $x \leq -1$ tai $x \geq 7$. Tapauksessa ”+3” taas on oltava $x-4 \geq 0$ eli $x \geq 4$.

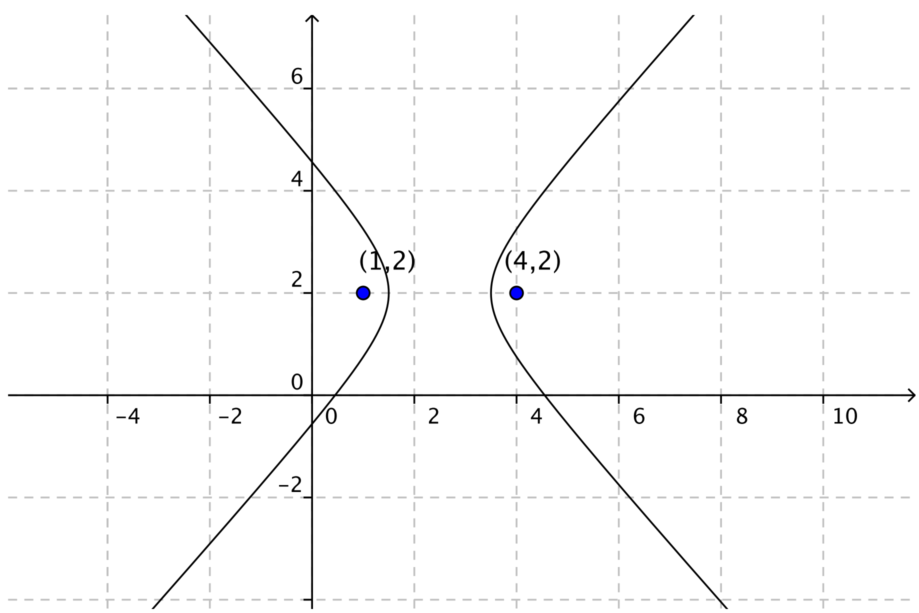


b) Johdetaan yhtälö a) -kohdan tapaan:

$$\left|\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right| = 2$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} &= \pm 2 \\
\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} &\pm 2 \\
\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 = (x-4)^2+(y-2)^2 \pm 4\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} &+ 4 \\
\Leftrightarrow 6x-19 = \pm 4\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} & \\
\Leftrightarrow 36x^2-228x+361-16(x^2-8x+16)-16(y-2)^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow 20x^2-100x+105-16(y-2)^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow 20x^2-100x+125-16(y-2)^2 &= 20 \\
\Leftrightarrow \left(2\sqrt{5}x-\frac{25}{\sqrt{5}}\right)^2-16(y-2)^2 &= 20 \\
\Leftrightarrow 20\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-16(y-2)^2 &= 20 \\
\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}{1}-\frac{(y-2)^2}{\frac{5}{4}} &= 1.
\end{aligned}$$

Kyseessä on siis hyperbeli.

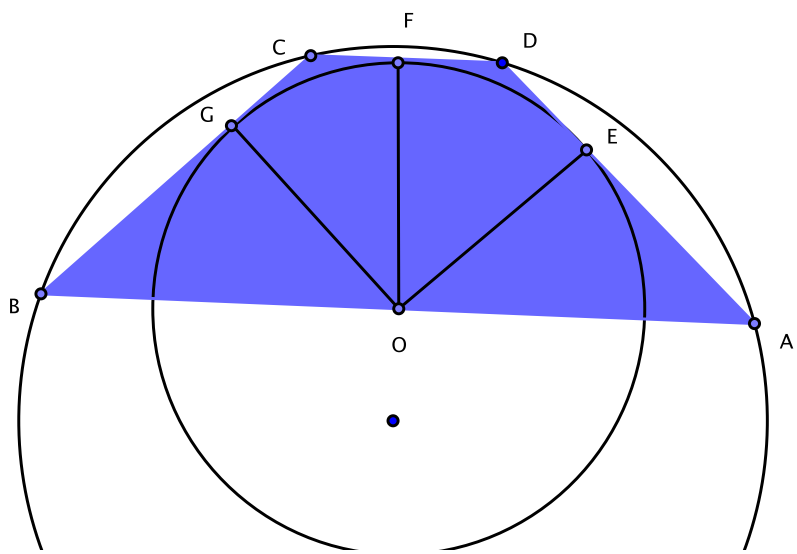


5. *Nelikulmion $ABCD$ kärjet sijaitsevat erään ympyrän kehällä. Lisäksi on olemassa ympyrä, jonka keskipiste sijaitsee sivulla AB ja joka sivuaa nelikulmion muita sivuja. Kilpatehtävässä on osoitettava, että $AD + BD = AB$ (missä puhutaan sivujen pituuksista.)* Edellä kirjaimet kiertävät nelikulmiota myötäpäivään. Olkoon O jälkimmäisen ympyrän keskipiste ja E, F ja G pisteet, joissa se sivuaa nelikulmion $ABCD$ sivuja AD, DC ja CB. Merkitään $\angle OCF = \alpha$. Osoita, että

(i) $\angle DCB = 2\alpha$ ja

(ii) $\angle DAO = \angle DAB = 180° - 2\alpha$.

Ratkaisu. (i) Kolmiot OCF ja OCG ovat suorakulmaisia. Lisäksi OC



on näiden kolmioiden yhteinen sivu ja $OF \cong OG$. Siispä kolmiot OCF ja OCG ovat yhteneviä (suorakulmainen ssk). Näin ollen $\angle OCG = \alpha$, joten $\angle DCB = 2\alpha$.

(ii) Harjoituksissa 7 todistettiin, että jännenelikulmiossa $ABCD$ kulmat $\angle DAB$ ja $\angle DCB$ ovat toistensa vieruskulmia. Koska tehtävän nelikulmio $ABCD$ on jännenelikulmio ja koska piste O on suoralla AB pätee $\angle DAO = \angle DAB = 180° - 2\alpha$.

6. Kierretään kolmiota OCF kolmioksi OHE. (Tässä siis piste F kiertyy pisteen E päälle.) Osoita, että

(i) piste H on suoralla AD

(ii) $\angle AHO = \alpha$
(iii) $\angle HOA = \alpha$.

Ratkaisu. (i) Kolmio OHE on suorakulmainen (kierto on yhtenevyyskuvaus). Myös kolmio OEA on suorakulmainen. Siispä kulma $\angle AEH$ on oikokulma. Näin ollen H on suoralla AE, joka on sama kuin AD.

(ii) Kierretylle kolmiolle pätee $\angle EHO = \alpha$. Koska piste H oli suoralla AD, pätee myös $\angle AHO = \alpha$.

(iii) Koska nyt $\angle AHO = \alpha$ ja $\angle DAO = 180° - 2\alpha$, on oltava $\angle HOA = \alpha$.

7. Osoita, että
(i) $AO = AH$
(ii) $AH = AE + CG$
(iii) $AO = AE + CG$.

Ratkaisu. (i) Koska $\angle AHO = \alpha$ ja $\angle HOA = \alpha$, kolmio HOA on tasakylkinen, joten $AO = AH$.

(ii) Koska $CG \cong EH$ ja $AH = AE + EH$, pätee $AH = AE + CG$.

(iii) Kohtien (i) ja (ii) perusteella $AO = AE + CG$.

8. (i) Miten edellä olevaa pitää muuttaa, että saadaan tulos $BO = BG + ED$?

(ii) Osoita tulosten 7 (iii) ja 8 (i) avulla, että kilpatehtävän väite $AD + BC = AB$ pätee.

Ratkaisu. (i) Tulos saadaan täysin vastaavasti. Merkitään $\angle ODF = \beta$, osoitetaan, että $\angle CDA = 2\beta$, kierretään kolmiota ODF jne.

(ii) Tulosten 7 (iii) ja 8 (i) perusteella saadaan:

$$\begin{aligned} AB = AO + BO &= (AE + CG) + (BG + ED) \\ &= (AE + ED) + (BG + GC) \\ &= AD + BC. \end{aligned}$$