MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Geometria 2012
Harjoitus 11
16.4. alkavalle viikolle
Ratkaisuja (Jani Hannula)

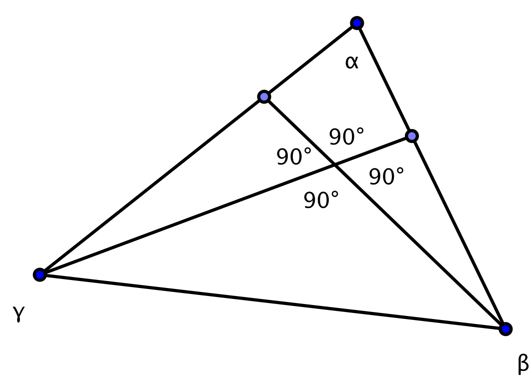
1. Todista käänteinen Pythagoraan lause: jos kolmion sivujen pituudet toteuttavat yhtälön $a^2 + b^2 = c^2$, niin kolmio on suorakulmainen.

Ratkaisu. Tehtävän lause voidaan osoittaa eri tavoin riippuen siitä, mitä oletetaan tunnetuksi. Lause voidaan osoittaa esim. kosinilauseen avulla. Tehdään todistus olettaen Pythagoraan lause.

Olkoon kolmion ABC sivujen pituudet a, b ja c ja oletetaan että pätee $a^2 + b^2 = c^2$. Voidaan konstruoida sellainen suorakulmainen kolmio, joiden kateettien pituudet ovat a ja b. Olkoon tällaisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus d. Nyt Pythagoraan lauseen nojalla $a^2 + b^2 = d^2$. Nyt on oltava $c = d$, joten kolmiot ovat yhtenevät (sss). Siispä kolmion ABC kulma $\angle ACB$ on oltava suora.

2. Onko olemassa kolmiota, jonka kahden kulman puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vasten?

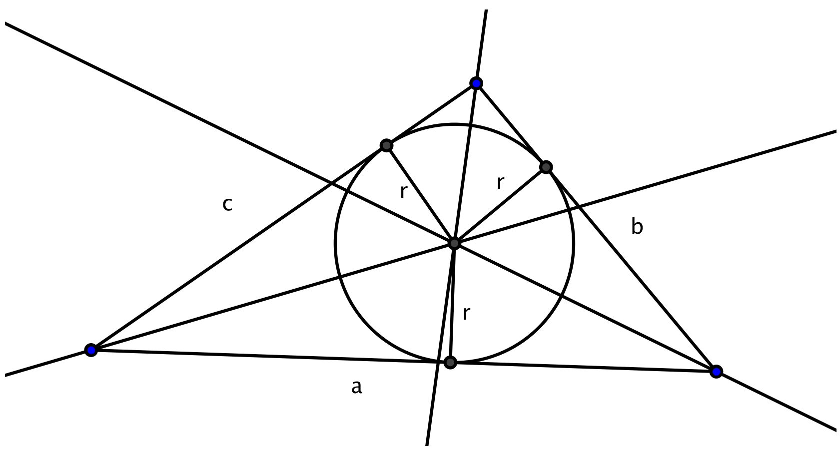
Ratkaisu. Oletetaan, että tällainen kolmio olisi. Nyt tilanne on kuvan mu-



kainen. Kolme kolmion sisään syntyvää kolmiota ovat yhdenmuotoisia (kk). Nyt on oltava $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ ja toisaalta $\alpha+90°+(180°-\frac{\beta}{2})+(180°-\frac{\gamma}{2}) = 360°$ (kolmion sisään syntyvä nelikulmio). Näistä saadaan $\alpha = 0°$, mikä on ristiriita.

3. Kolmion sivujen pituudet ovat a, b ja c. Johda lauseke kolmion sisään piirretyn ympyrän säteelle.

Ratkaisu. Hyödynnetään Heronin kaavaa. Merkitään kolmion alaa symbo-

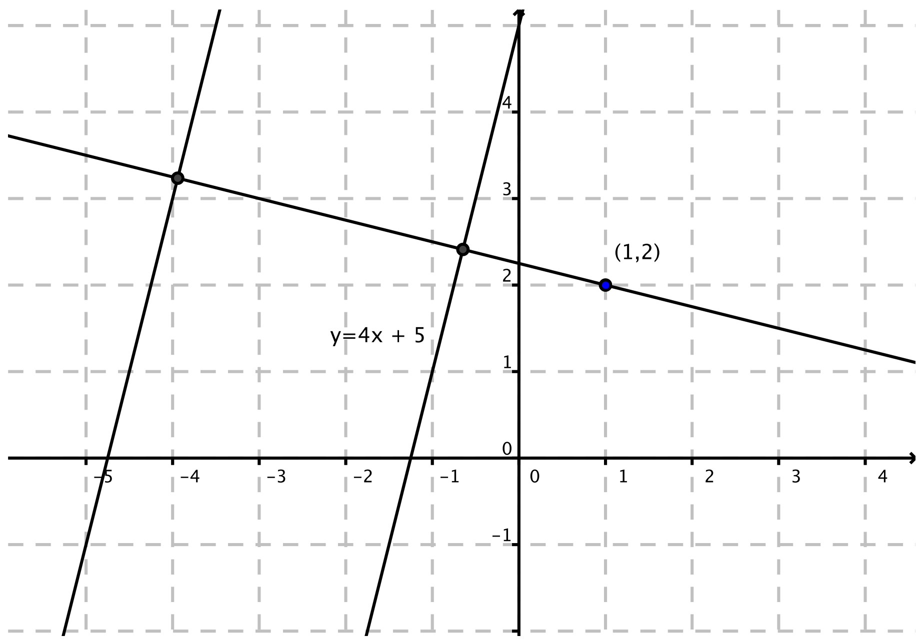


lilla $\triangle$ ja piirin puolikasta $p = \frac{a+b+c}{2}$. Tällöin Heronin kaavan mukaan pätee $\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Olkoon r kolmion sisään piirretyn ympyrän säde. Kulmanpuolittajat jakavat kolmion kolmeen kolmioon (katso kuva). Heronin kaavan lisäksi pätee siis myös $\triangle = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = pr$. Näin ollen pätee

$$
\begin{aligned}
pr &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
\Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}.
\end{aligned}
$$

4. Homotetian keskuksena on $(1,2)$ ja suurennuskerroin on 3. Johda yhtälö suoran $y = 4x+5$ kuvan yhtälölle.

Ratkaisu. Tiedetään, että suorat kuvautuvat homotetiassa yhdensuuntai-

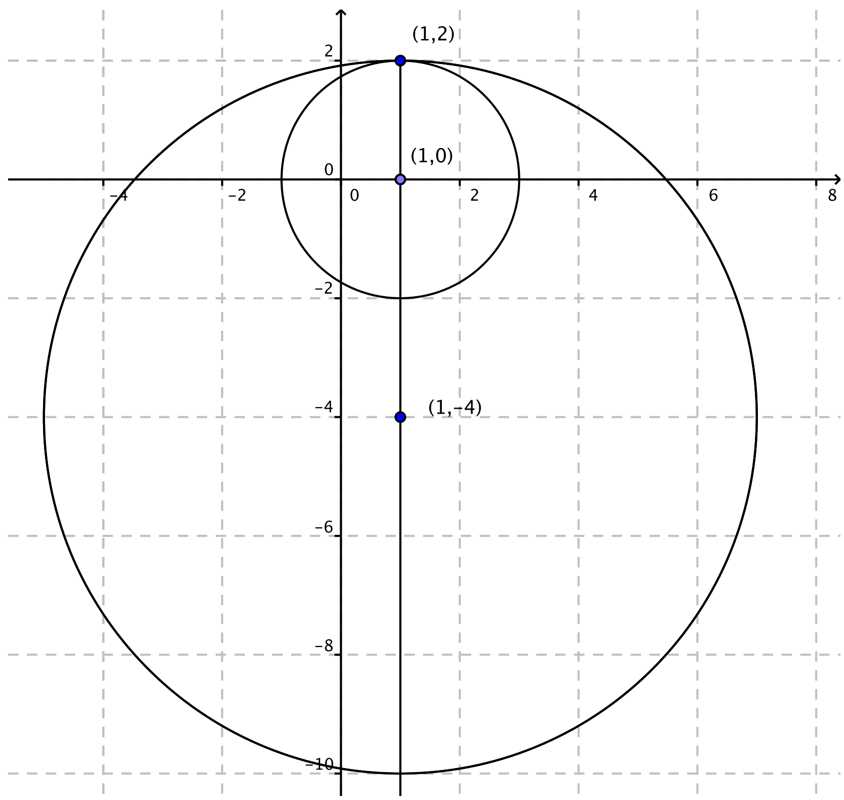


siksi suoriksi (harjoitus 9). Etsittävä kuvan yhtälö on siis muotoa $y = 4x + c$. Kun lasketaan pisteen $(1, 2)$ ja suoran $y = 4x+5$ etäisyys d, saadaan $d = \frac{7\sqrt{17}}{17}$. Näin ollen $3d = \frac{21\sqrt{17}}{17}$, mikä on oltava etsittävän suoran etäisyys pisteestä $(1, 2)$. Näin saadaan ratkaistua c. Ratkaisuja voidaan itse asiassa saada näin kaksi: $c = 19$ tai $c = -23$. Näistä jälkimmäinen edustaa käänteistä homotetiaa (jossa homotetiasuhde on -3), eli etsityn suoran yhtälö on $y = 4x + 19$.

Huom. tässä olisi voinut kuvata minkä tahansa pisteen suoralta $y = 4x+5$ *ja päätellä sen avulla ”kuvasuoran” ja y-akselin leikkauspisteen. Suoran lähin piste ei ollut välttämättä ihan helpoin piste laskea...*

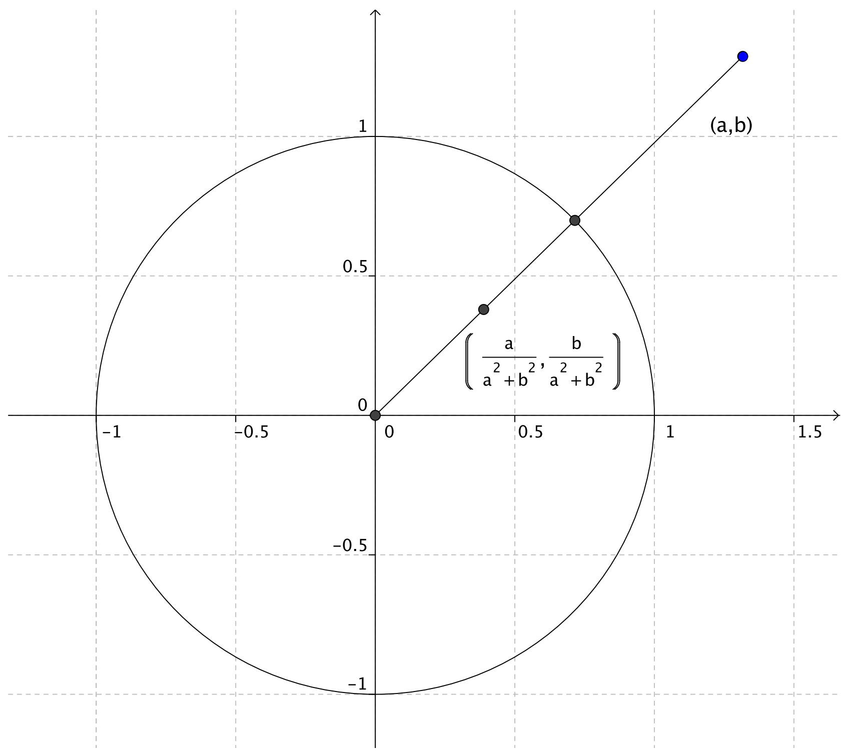
5. Sama homotetia kuin edellisessä tehtävässä. Johda yhtälö ympyrän $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ kuvan yhtälölle.

Ratkaisu. Tiedetään, että ympyrät kuvautuvat homotetiassa ympyröiksi (harjoitus 9). Havaitaan, että homotetiakeskus on kuvattavan ympyrän kehällä. Lisäksi keskipisteen kuva on oltava suoralla $x = 1$. Koska homotetiakerroin oli 3, kuvautuu keskipiste $(1, 0)$ homotetiassa pisteeseen $(1, -4)$. Lisäksi ”kuvaympyrän” säde on oltava 6, joten kysytty yhtälö on $(x-1)^2+(y+4)^2 = 36$.



6. Tutkitaan inversiota ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ suhteen. Muodosta lauseke pisteen (a, b) kuvapisteelle.

Ratkaisu. Vektorin (a, b) pituus on $\sqrt{a^2 + b^2}$. Kun tutkitaan inversiota yksikköympyrän suhteen, on pädettävä, että (a, b):n kuva (a', b') inversiossa on (a, b):n kanssa samalla suoralla (eli $(a', b') = t(a, b)$, missä $t \in \mathbb{R}$) ja



etäisyyksille pätee $|(a,b)| \cdot |(a',b')| = 1$. Saadaan:

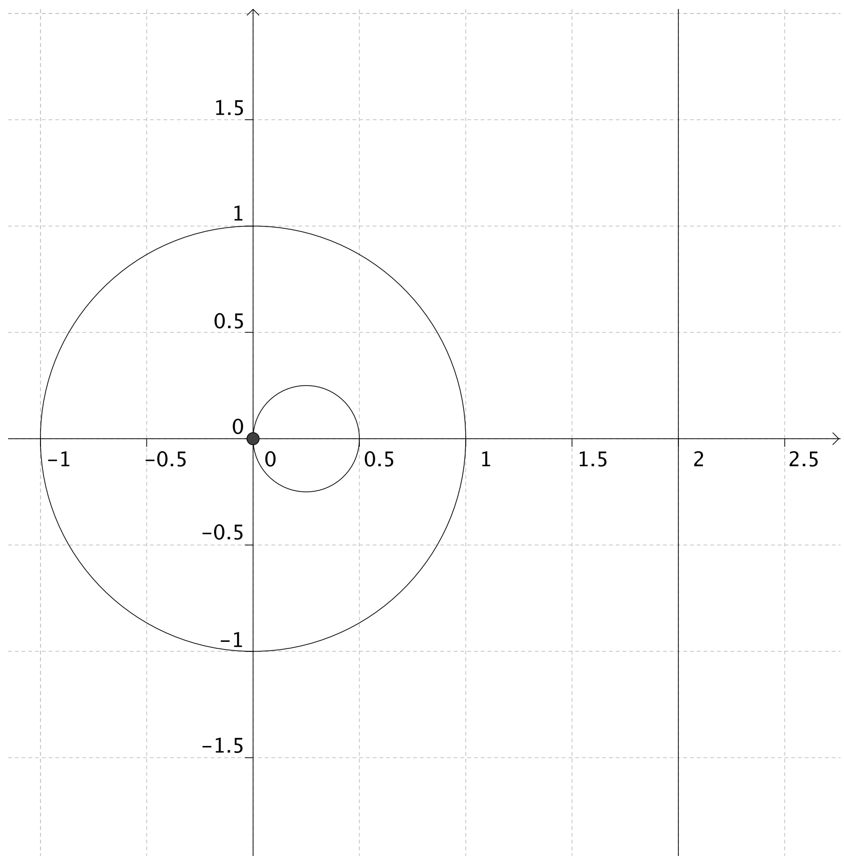
$$\begin{aligned}
|(a,b)| \cdot |(a',b')| &= 1 \\
\Leftrightarrow |(a,b)| \cdot |t(a,b)| &= 1 \\
\Leftrightarrow \sqrt{(ta)^2 + (tb^2)} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\Leftrightarrow (ta)^2 + (tb)^2 &= \frac{1}{a^2+b^2} \\
\Leftrightarrow t^2 &= \frac{1}{(a^2+b^2)^2} \\
\Leftrightarrow t &= \frac{1}{a^2+b^2}.
\end{aligned}$$

Näin ollen kuvapisteeksi saadaan

$$(a',b') = t(a,b) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

7. Sama inversio kuin edellisessä tehtävässä. Johda (analyyttisen geometrian avulla) suoran $x = 2$ kuvan yhtälö.

Ratkaisu. Ympyrän keskipisteen kautta kulkevat ympyrät kuvautuvat in-



versiossa suoriksi, jotka ovat kohtisuorassa keskipisteen kautta kulkevan kuvattavan ympyrän halkaisijan kanssa[1]. Piste $(2, 0)$ kuvautuu tutkittavassa inversiossa pisteeseen $(1/2, 0)$ ja yleisemmin edellisen tehtävän perusteella

$$(2, y) \mapsto \left(\frac{2}{4 + y^2}, \frac{y}{4 + y^2} \right).$$

Vaikuttaisi, että tutkittava suora kuvautuu ympyräksi, jonka keskipiste on $(1/4, 0)$ ja säde $1/4$. Tämä voidaan todeta näyttämällä, että jokaisen kuva-

[1] Lause muotoiltu paremmin esim. Lehtisen monisteessa...

pisteen etäisyys pisteestä $(1/4, 0)$ todellakin on $1/4$:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4+y^2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{4+y^2}\right)^2} \\
= \quad &\ldots \text{laskemista} \ldots \\
= \quad &\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Kuvan yhtälö on siis

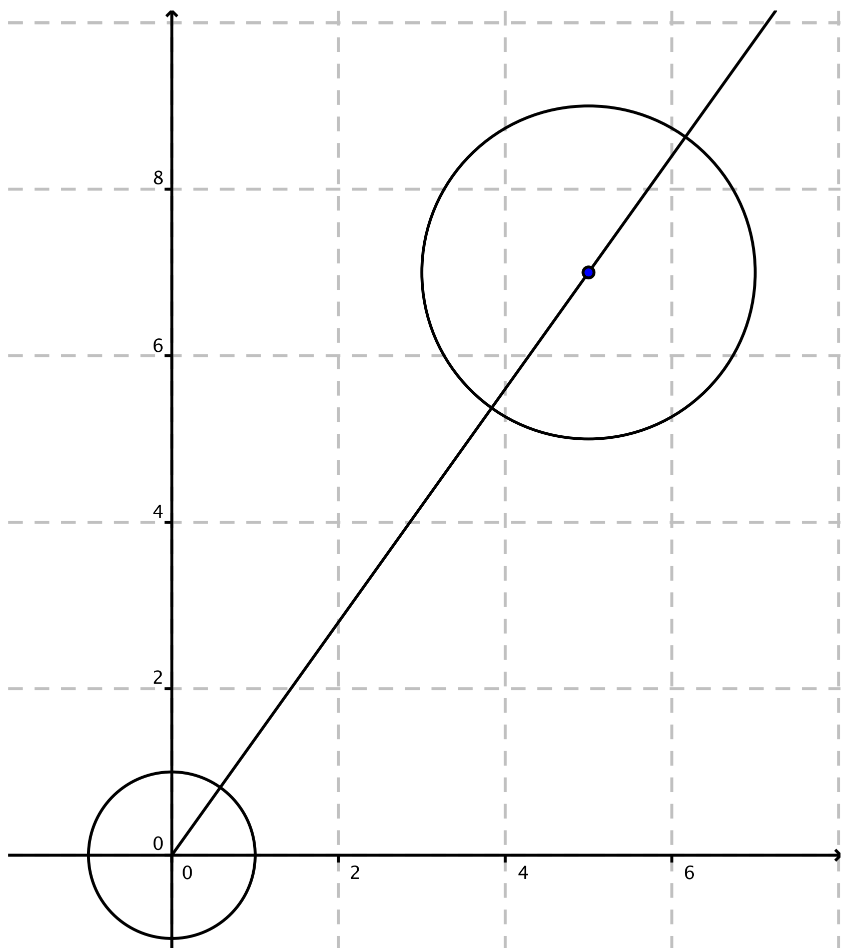
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

8. Sama inversio kuin edellisessä tehtävässä. Johda ympyrän $(x-5)^2 + (y-7)^2 = 4$ kuvan yhtälö.

Ratkaisu. Ympyröiden, jotka eivät kulje ympyrän keskipisteen (tässä tapauksessa origon) kautta, kuvautuvat inversiossa ympyröiksi. Lisäksi ”kuvaympyrän” keskipiste on kahden muun ympyrän keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla[2]. Tässä tapauksessa origon ja pisteen $(5, 7)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on $y = \frac{7}{5}x$.

Laskuista tulee tällä menetelmällä sotkuisia, joten tyydytään esittämään ratkaisun idea. Kun ratkaistaan suoran $y = \frac{7}{5}x$ ja ympyrän $(x-5)^2+(y-7)^2 = 4$ leikkauspisteet saadaan tehtävän 6 avulla näiden pisteiden kuvapisteet. Ympyrän keskipiste on näiden pisteiden välisen janan keskipiste. Säde saadaan luonnollisesti tämän janan pituuden puolikkaana.

[2]Katso esim. Lehtinen.



8
6
4
2
0
0
2
4
6