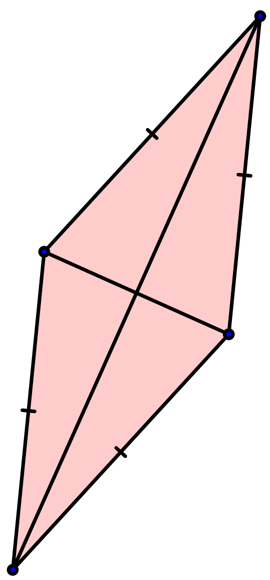
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Geometria 2012
Harjoitus 1
16.1. alkavalle viikolle
Ratkaisuja (Jani Hannula)

1 (Lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävä 7 keväältä 2009) Neljäkkään (vinoneliön) sivun pituus on 8,0 cm. Lyhyempi lävistäjistä on 4,0 cm pitkä. Laske pitemmän lävistäjän pituus.

Ratkaisu.



Neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa, sillä piirrettäessä neljäkkäälle lävistäjät, syntyy yhteneviä kolmioita. Erityisesti lävistäjien keskenään muodostamat kulmat ovat suoria. Olkoon x puolet pidemmän lävistäjän pituudesta. Tällöin

$$\begin{aligned} x^2 + 2^2 &= 8^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 60 \\ \overset{*}{\Leftrightarrow} x &= \sqrt{60} = 2\sqrt{15}. \end{aligned}$$

Huomaa yhtäpitävyys kohdassa *. Nyt saadaan lävistäjän pituudeksi
$4\sqrt{15}$ cm $\approx 15,5$ cm.

2 (Pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävä 5 syksyltä 2007) Määritä ympyrän $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ niiden tangenttien yhtälöt, jotka kulkevat pisteen $(1,3)$ kautta.

Ratkaisu. Selvitetään aluksi ympyrän keskipiste ja säde. Tavoitteena on siis muokata ympyrän yhtälö muotoon $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+4x-2y+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)^2-4+(y-1)^2-1+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-(-2))^2+(y-1)^2 &= 2^2. \end{aligned}$$

Siis saadaan ympyrän säde $r=2$ ja keskipiste $O=(-2,1)$. Kun muistetaan, että kaikki pisteen (x_0,y_0) kautta kulkevat suorat saadaan kaavalla

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

saadaan pisteen $(1,3)$ kautta kulkevien suorien yhtälöksi:

$$\begin{aligned} & y-3=k(x-1) \\ \Leftrightarrow\quad & kx-y+(3-k)=0. \end{aligned}$$

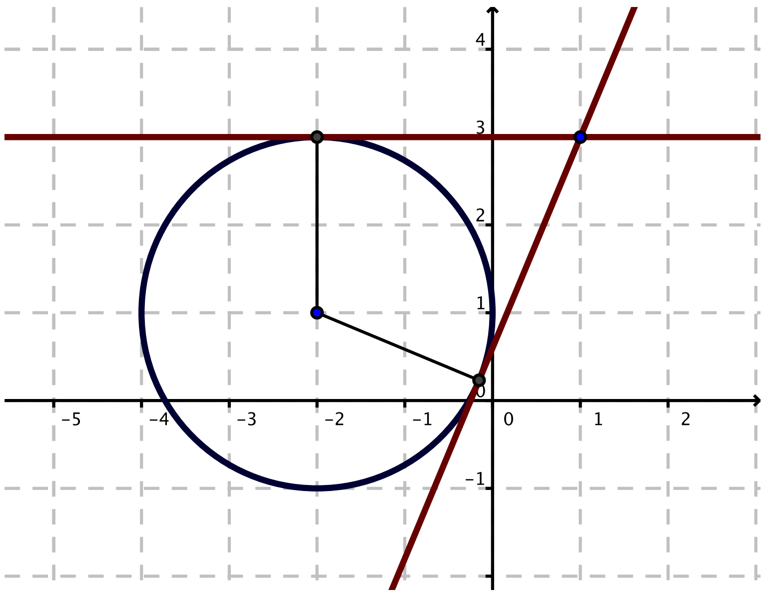
On selvitettävä, mitkä näistä suorista ovat ympyrälle piirrettyjä tangentteja. Tangentteja näistä suorista ovat täsmälleen ne, joihin etäisyys ympyrän keskipisteestä on yhtäsuuri kuin säde. Pisteen (x_0,y_0) etäisyys d suorasta $ax+by+c=0$ saadaan kaavalla:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Nyt voidaan selvittää kulmakertoimet vaatimalla tämä etäisyys säteen pituudeksi:

$$\begin{aligned} \frac{|k(-2)-1+(3-k)|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} &= 2 \\ \Leftrightarrow |-3k+2| &= 2\sqrt{k^2+1} \\ \Leftrightarrow |3k-2| &= 2\sqrt{k^2+1} \\ \overset{\text{huom!}}{\Leftrightarrow} (3k-2)^2 &= (2\sqrt{k^2+1})^2 \\ \Leftrightarrow 9k^2-12k+4 &= 4k^2+4 \\ \Leftrightarrow 5k^2-12k &= 0 \\ \Leftrightarrow k(5k-12) &= 0. \end{aligned}$$

Siis saadaan $k = 0$ tai $k = 12/5$. Nyt siis kysyttyjen tangenttien yhtälöt ovat $y = 3$ ja $y = (12/5)x + 3/5$.



3 (Pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävä 8 keväältä 2009) Taso T kulkee pisteiden $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$ ja $C = (1, 2, 3)$ kautta. Muodosta tason yhtälö muodossa $ax + by + cz + d = 0$.

Ratkaisu. On etsittävä sellaiset kertoimet $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, että yhtälö $ax + by + cz + d = 0$ toteutuu pisteiden A, B ja C koordinaatteja vastaavilla muuttujien x, y ja z arvoilla. Saadaan siis yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 3a + d = 0 \\ 4b + d = 0 \\ a + 2b + 3c + d = 0. \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $a = -d/3$ ja toisesta yhtälöstä $b = -d/4$. Sijoittamalla nämä kolmanteen yhtälöön saadaan $c = -d/18$. Siispä yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} a = -d/3 \\ b = -d/4 \\ c = -d/18 \\ d \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Näin ollen halutuksi yhtälöksi saadaan:

$$\begin{aligned} d(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{18}z + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow d(-\frac{12}{36}x - \frac{9}{36}y - \frac{2}{36}z + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Valitaan $d = -36$, jolloin tason yhtälöksi saadaan $12x + 9y + 2z - 36 = 0$.

Huom. Tason yhtälö olisi saatu myös esimerkiksi ajattelemalla, että vektorit AB ja AC virittävät kysytyn tason.

4 (Pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävä 14 keväältä 2009) Vinon pyramidin pohja on neliö, jonka sivu on a. Pyramidin kahden vastakkaisen sivutahkon kulmat pohjan kanssa ovat 30 ja 135 astetta (pyramidin sisäpuolelta mitattuina).

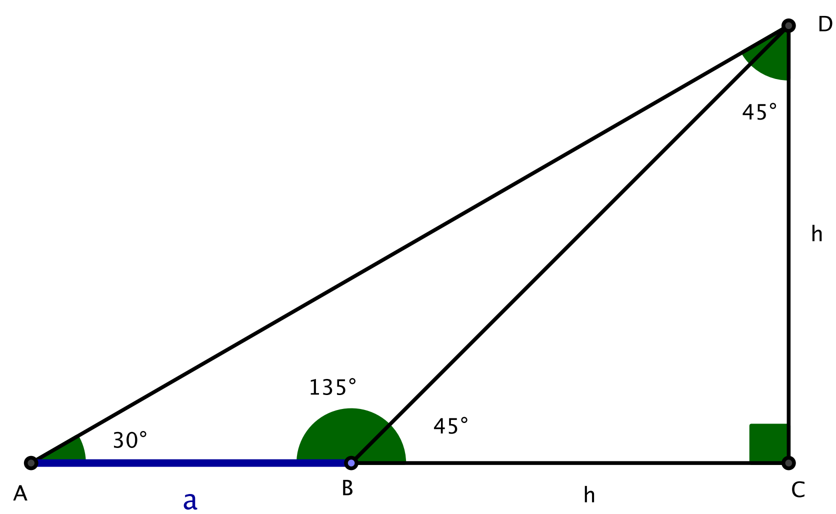
a) Laske pyramidin korkeus. (3 p.)

b) Määritä pyramidin tilavuus. (2 p.)

c) Kahden muun sivutahkon kulmat pohjan kanssa ovat keskenään yhtä suuret. Määritä tämä kulma asteen tarkkuudella. (4 p.)

Ratkaisu.

a) Tutkitaan leikkauskuviota, joka syntyy kun pyramidia leikataan pyra-



midin huipun sekä 30° ja 135° sivutahkoja vastaavien pohjan sivujen puolivälien määräämällä tasolla. Nyt, jos kuvan mukaisesti kolmio jatketaan suorakulmaiseksi, saadaan $\angle CBD = 45°$, jolloin myös $\angle BDC = 45°$, sillä $\angle BCD = 90°$. Siispä $BC \cong CD$. Nyt saadaan:

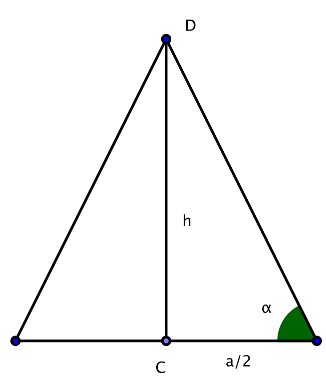
$$\begin{aligned}
\tan 30° &= \frac{h}{a+h} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{h}{a+h} \\
\Leftrightarrow \sqrt{3}h - h &= a \\
\Leftrightarrow h(\sqrt{3}-1) &= a \\
\Leftrightarrow h &= \frac{a}{\sqrt{3}-1} \\
\Leftrightarrow h &= \frac{(\sqrt{3}+1)a}{3-1} \\
\Leftrightarrow h &= \frac{(\sqrt{3}+1)a}{2}.
\end{aligned}$$

Siis kysytty pyramidin korkeus on $(\sqrt{3}+1)a/2$.

b) Pyramidin tilavuus on kolmannes pohjan alan ja korkeuden tulosta. Siispä tilavuus V saadaan tietojemme perusteella:

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{(\sqrt{3}+1)a^3}{6}.$$

c) Nyt on a-kohtaan verrattuna ”näkökulmaa käännettävä 90 astetta”.



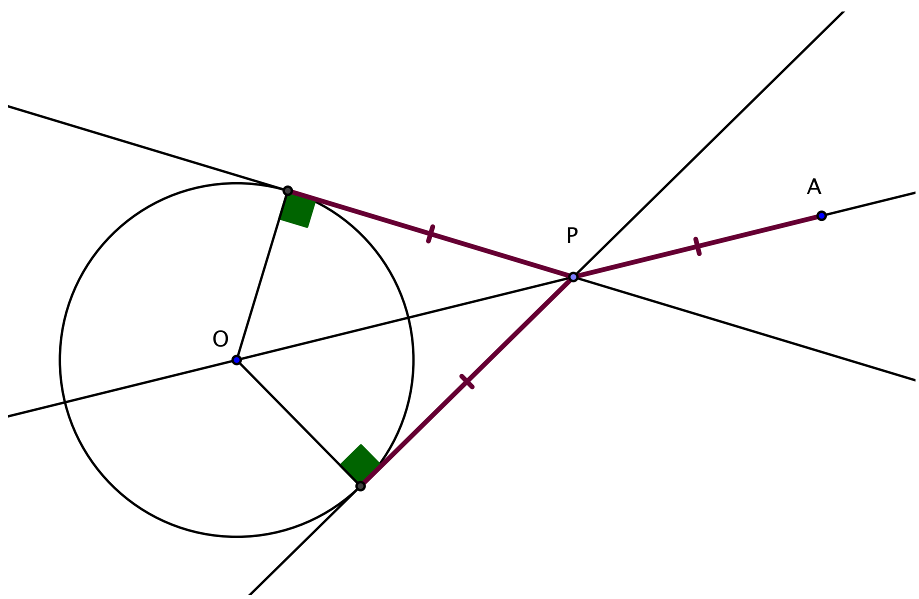
Ajatellaan aluksi tasoa τ, joka kulkee a-kohdan kuvassa D:llä ja C:llä merkittyjen pisteiden kautta ja joka on kohtisuorassa janaa AC vasten. Nyt tutkittavien sivutahkojen jatkeiden ja tason τ leikkauksesta saadaan kuvan mukainen kolmio, jossa kulma α on kysytty kulma. Saadaan

$$\tan\alpha = \frac{h}{a/2} = \frac{(\sqrt{3}+1)a}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3}+1,$$

josta saadaan edelleen $\alpha \approx 70°$.

5 (Tehtävä "Suoritettava" 7 kevään 1893 matematiikan ylioppilaskokeesta) Ympyrä ja piste sen ulkopuolella ovat tunnetut. Hae pistettä ja ympyrän keskipistettä yhdistävällä suoralla viivalla semmoinen piste, jonka etäisyys tunnetusta pisteestä on yhtäsuuri kuin ne tangentit, jotka haettavasta pisteestä saatetaan piirtää ympyrälle.

Ratkaisu. Tehtävänanto tarkoittaa sitä, että on löydettävä kuvan mukainen piste P. Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r, janan AO pituutta

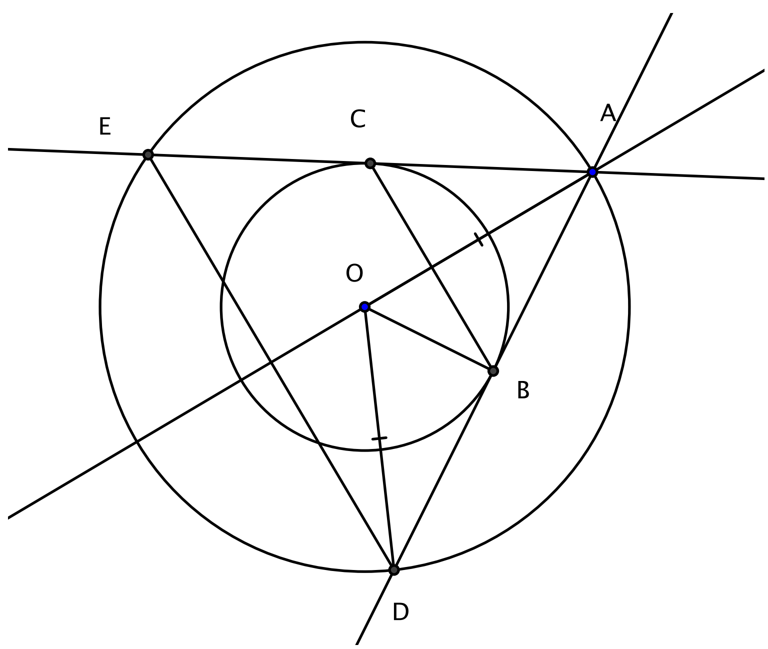


kirjaimella a ja haluttua etäisyyttä kirjaimella x. Nyt on oltava:

$$\begin{aligned} r^2 + x^2 &= (a-x)^2 \\ \Leftrightarrow r^2 + x^2 &= a^2 - 2ax + x^2 \\ \Leftrightarrow 2ax &= a^2 - r^2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a^2 - r^2}{2a} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a}{2} - \frac{r^2}{2a}. \end{aligned}$$

Huom. Käytännössä tässä haettiin jotain siis kriteeriä sille, kuinka etäällä piste P on oltava pisteestä A (tai pisteestä O), kun ympyrän säde ja pisteen A etäisyys ympyrästä (tai ympyrän keskipisteestä) tunnetaan.

6 (Tehtävä 5 kevään 1894 matematiikan ylioppilaskokeesta) Pisteestä A, joka on ulkopuolisemmalla kahdesta konsentrisestä ympyränkehästä, piirretään kaksi suoraa viivaa siten, että ne sivuavat sisäpuolista ympyränkehää pisteissä B ja C, sekä leikkaavat ulkopuolisen ympyrän kehän pisteissä D ja E. Todista että etäisyys BC on puolet etäisyydestä DE.



Ratkaisu. (Kannattaa ratkaisua lukiessa katsoa kuvaa.) Kolmio ADO on tasakylkinen (isomman ympyrän säde) sekä kulmat $\angle OBA$ ja $\angle OBD$ ovat suoria (tangentti). Näin ollen kolmiot ABO ja DBO ovat yhteneviä (ssk, "lisäehto"[1] voimassa). Siispä $DB \cong AB$. Vastaavasti saadaan $EC \cong AC$.

Nyt kolmiot CAB ja EAD ovat yhdenmuotoisia (sks) ja pätee:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{1}{2} = \frac{AC}{AE}.$$

Siispä on oltava myös

$$\frac{CB}{ED} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CB = \frac{1}{2}ED,$$

mikä oli todistettava.

[1] Koska tutkittavissa kolmioissa on yksi suora kulma, muut kulmat ovat teräviä.