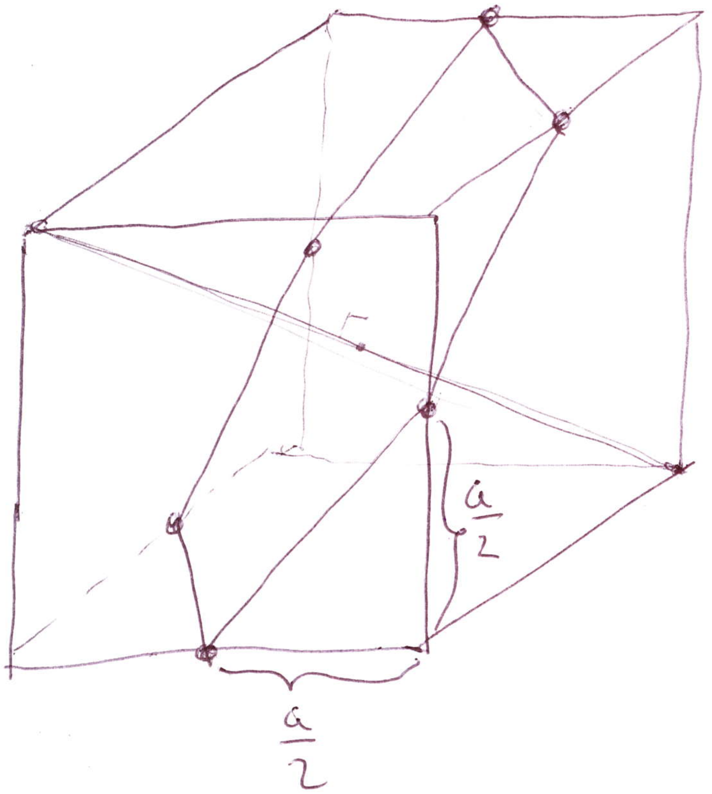
1.

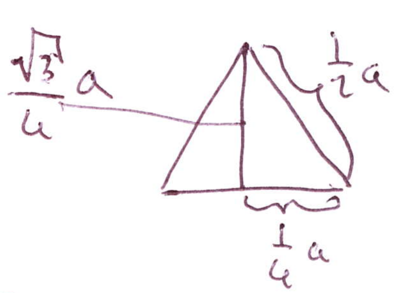
Geometria 2012
harjoitus 3
Ratkaisuja
(Jani Hannula)




Tilanteen hahmottamiseksi kannattaa ottaa käteen jokin kuutio ja asettaa se siten, että avaruuslävistäjä on pystysuorassa. Nyt vaadittu taso on vaakasuorassa ja puolivälissä korkeutta. Syntyy kuvan mukainen säännöllinen 6-kulmio.

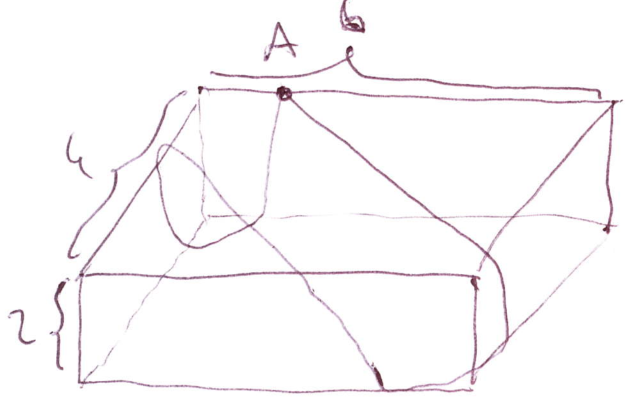
Pinta-ala saadaan kuuden tasasivuisen kolmion alojen summana.

$$A_{kolmio} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$

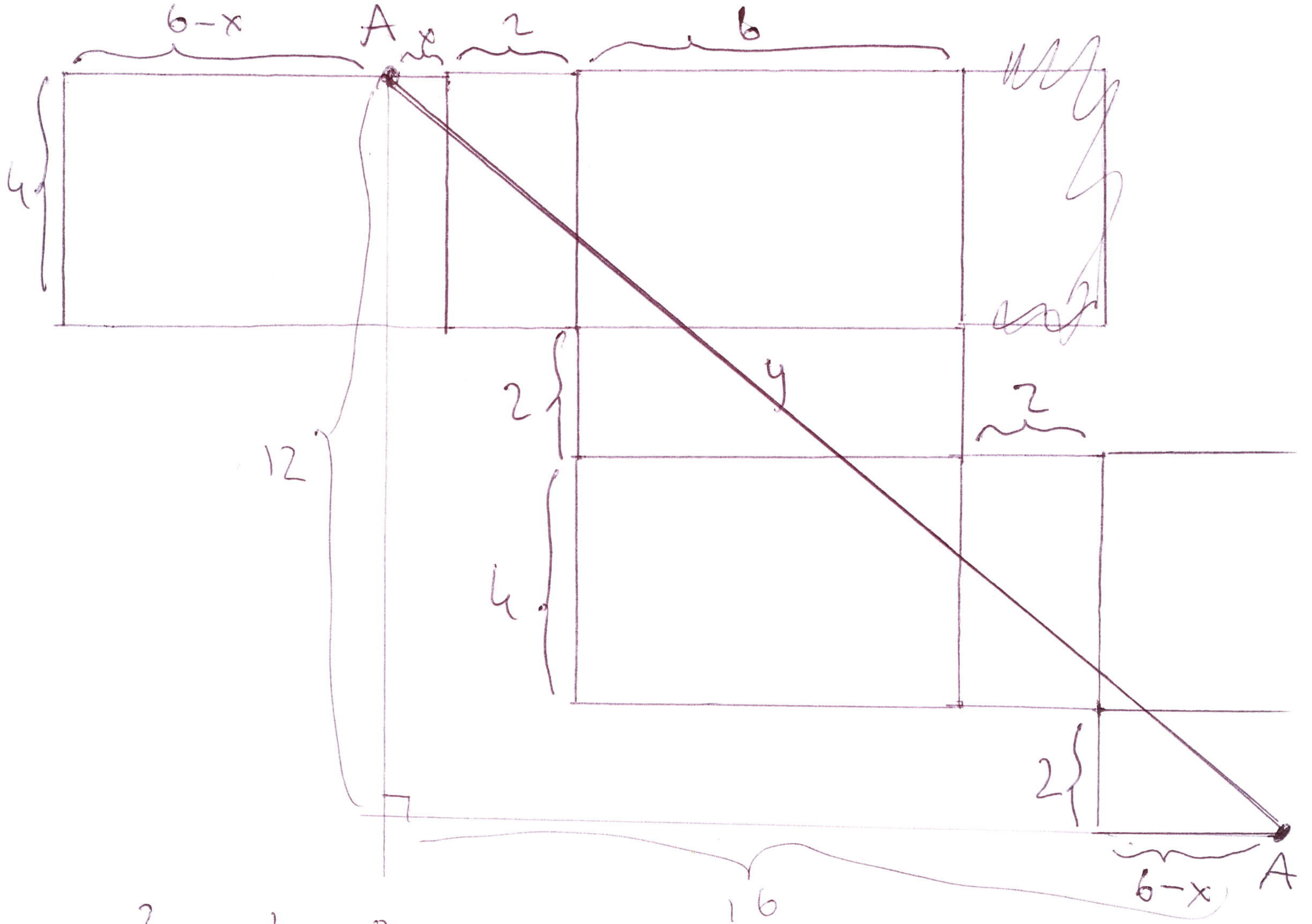



$$A_{6\text{-kulmio}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

2.

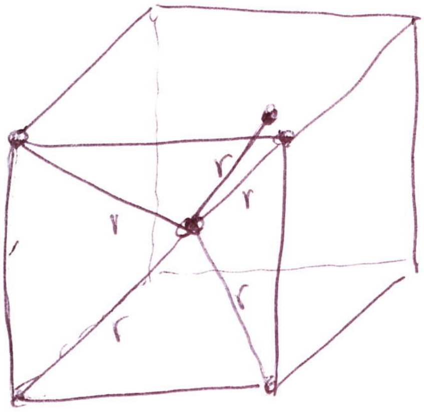



Ongelmaa kannattaa tutkia "levittämällä laatikko tasoon". "Kireälle vedetty nauha" tarkoittaa sitä, että kun laatikko levitetään tasoon, nauhaa vastaa suora.

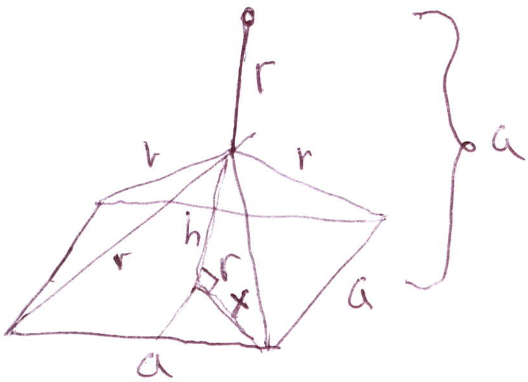



$$y^2 = 12^2 + 16^2 \iff y = \sqrt{400} = 20.$$

3.




Yllä olevassa kuvassa on hahmoteltu pallon keskipiste kuution sisään. Kaikkien mainuttujen pisteiden etäisyys keskipisteestä on oltava r (= pallon säde). Vaihdetaan "kuvakulmaa":




Kuvan mukaisilla merkinnöillä:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$h + r = a$$

$$\Leftrightarrow h = a - r$$

$$h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (a-r)^2 + \frac{a^2}{2} = r^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ar + r^2 + \frac{a^2}{2} = r^2$$

$$\Leftrightarrow 2ar = \frac{3}{2}a^2$$

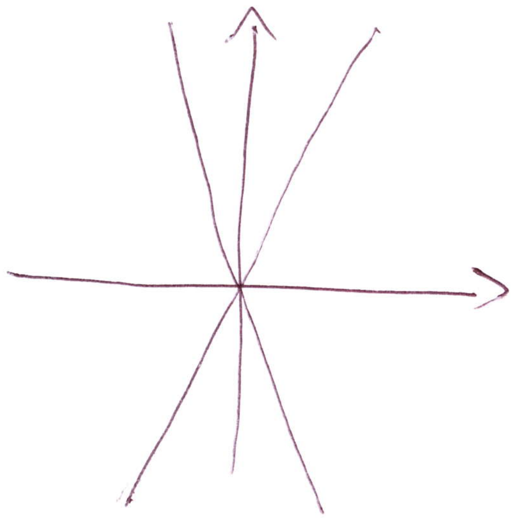
$$\Leftrightarrow r = \frac{3}{4}a.$$

4. a) $4x^2 - y^2 = 0$

$\iff y^2 = 4x^2$

$\iff y = 2x$ tai $y = -2x$

Pistejoukko muodostuu siis kahdesta suorasta (tai niiden pisteistä).

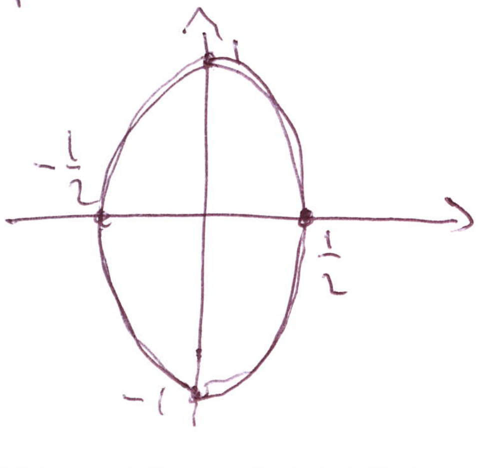


$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=2x \text{ tai } y=-2x\}$

b) $4x^2 + y^2 = 1$

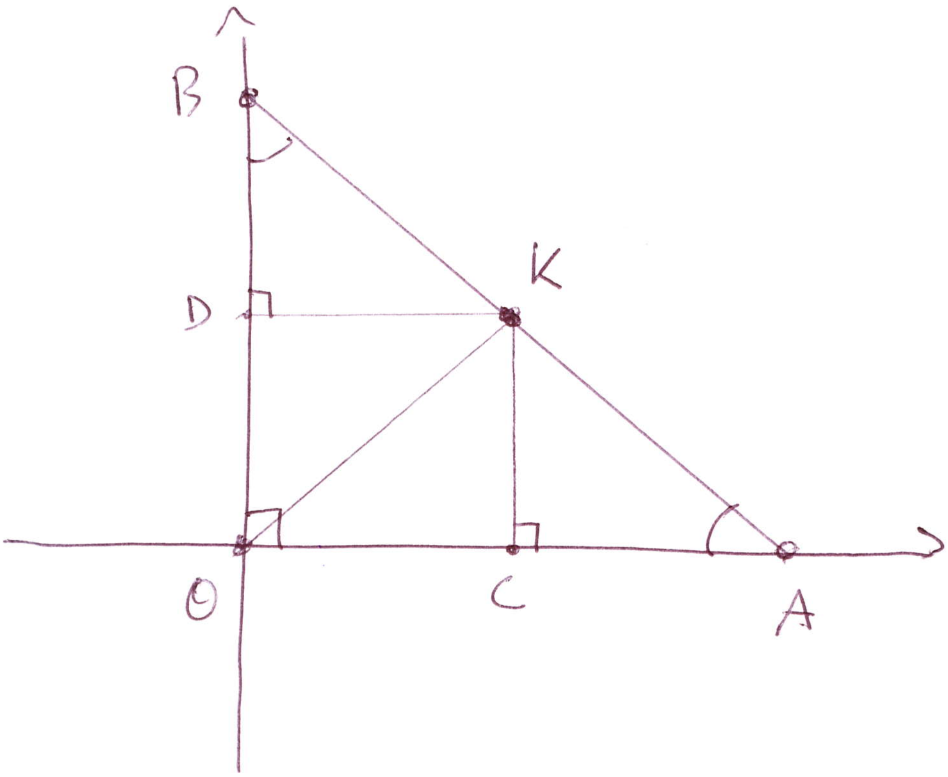
$\iff \dfrac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1$

Pistejoukko koostuu origokeskisen ellipsin pisteistä




$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1\right\}$

5.




Tehtävänannon tilanteessa janan $AB$ keskipiste $K$ näyttäisi piirtävän origokeskisen ympyrän. Näyttäisi myös, että $OK \cong AK \cong BK$.

Tämä voidaan näyttää esim. yhdenmuotoisuuden avulla. Jos pisteestä $K$ piirretään korkeusjanat janoille $AO$ ja $BO$, saadaan yhdenmuotoiset kolmiot:

$$BDK \sim BOA \text{ ja } AKC \sim ABO \quad (kk).$$

Tällöin $AC \cong OC$ ja $BD \cong OD$ (oletuksen mukaan $BK \cong AK$).

Mutta nyt

$$ACK \cong OCK \quad (sks),$$

mikä todistaa väitteen.

(Huom. erikoistapauksena on toki vielä tilanne, jossa jana on x- tai y-akselilla)

6. Väite: Jos $AB \cong A'B'$ ja $CD \cong C'D'$, niin $AB + CD \cong A'B' + C'D'$.

todistus:

$AB + CD = AE$ s.e. $B$ on $A$:n ja $E$:n välissä ja, että $BE \cong CD$.

$A'B' + C'D' = A'E'$ s.e. $B'$ on $A'$:n ja $E'$:n välissä ja, että $B'E' \cong C'D'$.

Nyt (koska $\cong$ on ekvivalenssirelaatio) pätee:

$$BE \cong CD \underset{\text{oletus}}{\cong} C'D' \cong B'E'.$$

Siis $BE \cong B'E'$.

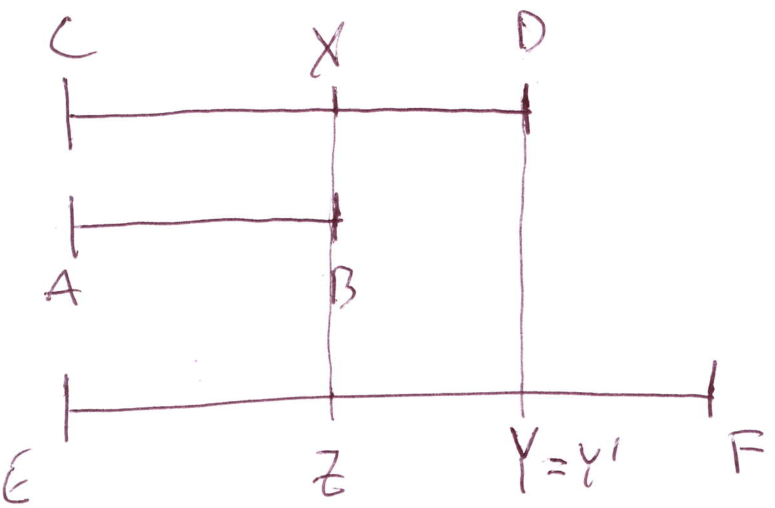
Lisäksi oletuksen mukaan $AB \cong A'B'$.

Nyt aksiooman 9 perusteella

$$AE \cong A'E' \quad \square$$

7, Väite: Jos $AB < CD$ ja $CD < EF$, niin $AB < EF$

todistus:




$AB < CD \Rightarrow$ janalla $CD$ on piste $X$ s.e. $AB \cong CX$

$CD < EF \Rightarrow$ janalla $EF$ on piste $Y$ s.e. $CD \cong EY$

Olkoon $Z$ sellainen puolisuoran $\overrightarrow{EF}$ piste, että $EZ \cong CX$. Halutaan näyttää, että $Z$ on janalla $EF$ ja että $EZ \cong AB$.

Olkoon nyt $Y'$ sellainen puolisuoran $\overrightarrow{ZE}$ vastakkaisen puolisuoran piste, että $ZY' \cong XD$. Aksiooman 9 perusteella $EY' \cong CD$. Mutta nyt on oltava $Y = Y'$. Siispä $Z$ on janalla $EY$. Siis edelleen (lause 1.2.3.) $Z$ on janalla $EF$. Lisäksi $EZ \cong AB$, sillä $AB \cong CX$ ja $CX \cong EZ$.

Näin ollen $AB < EF$ □

8. Osoita: Jos $AB$ ja $CD$ ovat kaksi janaa, niin täsmälleen yksi seuraavista pätee: $AB \cong CD$, $AB < CD$, $AB > CD$.

todistus: Aksiooma 7:n perusteella puolisuoralla $\overrightarrow{CD}$ on yksi ja vain yksi piste $E$ s.e. $AB \cong CE$.

i) Jos $E = D$ niin $AB \cong CD$

ii) Jos $E \neq D$ niin joko

– $D$ on $C$:n ja $E$:n välissä, jolloin $AB > CD$

tai

– $E$ on $C$:n ja $D$:n välissä, jolloin $AB < CD$.

Aksiooman 5 perusteella näistä kahdesta vaihtoehdosta vain yksi on voimassa.