MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Geometria 2012

Harjoitus 12

23.4. alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa tehtävissä 1 – 4 palautetaan mieleen kartioleikkauksien analyyttiseen geometriaan liittyviä asioita. Loppupään tehtävissä käsitellään Joutsassa 1985 järjestettyjen kansainvälisten matematiikkaolympialaisten (IMO) tehtävää 1.

1. Johda yhtälö niiden pisteiden (x, y) joukolle, joiden etäisyys pisteestä (1, 2) on kaksi kertaa niin suuri kuin pisteestä (4, 2). Tulos liittyy Apolloniuksen ympyrään, josta on puhetta mm. Väisälän Geometriassa.

2. Johda yhtälö niiden pisteiden (x, y) joukolle, joiden pisteistä (1, 2) ja (4, 2) laskettujen etäisyyksien summa on 5. Millä nimellä kutsutaan tällaista käyrää?

3. Johda yhtälö niiden pisteiden (x, y) joukolle, joiden etäisyys pisteestä (1, 2) on yhtä suuri kuin suorasta y = 4. Millä nimellä kutsutaan tällaista käyrää?

4. Johda yhtälö niiden pisteiden (x, y) joukolle, joiden pisteistä (1, 2) ja (4, 2) laskettujen etäisyyksien erotuksen itseisarvo on (a) 3; (b) 2. Millä nimellä kutsutaan tällaista käyrää?

5. *Nelikulmion ABCD kärjet sijaitsevat erään ympyrän kehällä. Lisäksi on olemassa ympyrä, jonka keskipiste sijaitsee sivulla AB ja joka sivuaa nelikulmion muita sivuja. Kilpatehtävässä on osoitettava, että AD + BC = AB (missä puhutaan sivujen pituuksista.)* Edellä kirjaimet kiertävät nelikulmiota myötäpäivään. Olkoon O jälkimmäisen ympyrän keskipiste ja E, F ja G pisteet, joissa se sivuaa nelikulmion ABCD sivuja AD, DC ja CB. Merkitään $<OCF = \alpha$. Osoita, että
(i)$<DCB = 2\alpha$ ja
(ii) $<DAO =<DAB = 180^o - 2\alpha$.

6. Kierretään kolmiota OCF kolmioksi OHE. (Tässä siis piste F kiertyy pisteen E päälle.) Osoita, että
(i) piste H on suoralla AD
(ii) $<AHO = \alpha$
(iii) $<HOA = \alpha$.

7. Osoita, että
(i) AO = AH
(ii) AH = AE + CG
(iii) AO = AE + CG

8. (i) Miten edellä olevaa pitää muuttaa, että saadaan tulos BO = BG + ED?
(ii) Osoita tulosten 7 (iii) ja 8 (i) avulla, että kilpatehtävän väite AD + BC = AB pätee.