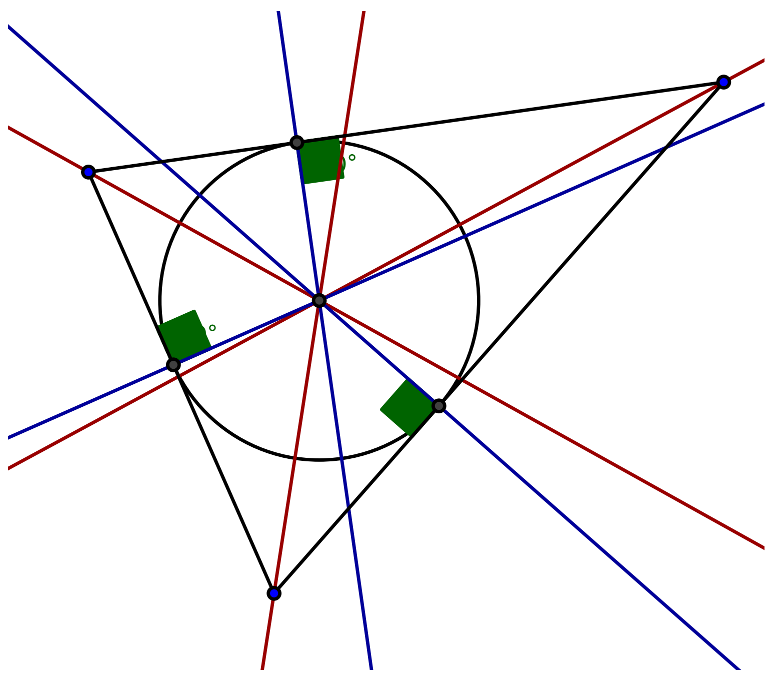
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Geometria 2012
Harjoitus 6
20.2. alkavalle viikolle
Ratkaisuja (Jani Hannula)

Huom. Aivan kaikkia konstruktioiden yksityiskohtia (kuten keskinormaalin konstruointi ym.) ei ole tässä aina selitetty, vaan on jälleen kerran pyritty ensisijaisesti esittämään ratkaisun idea.

1. Piirrä kolmion sisään piirretty ympyrä.

Ratkaisu.



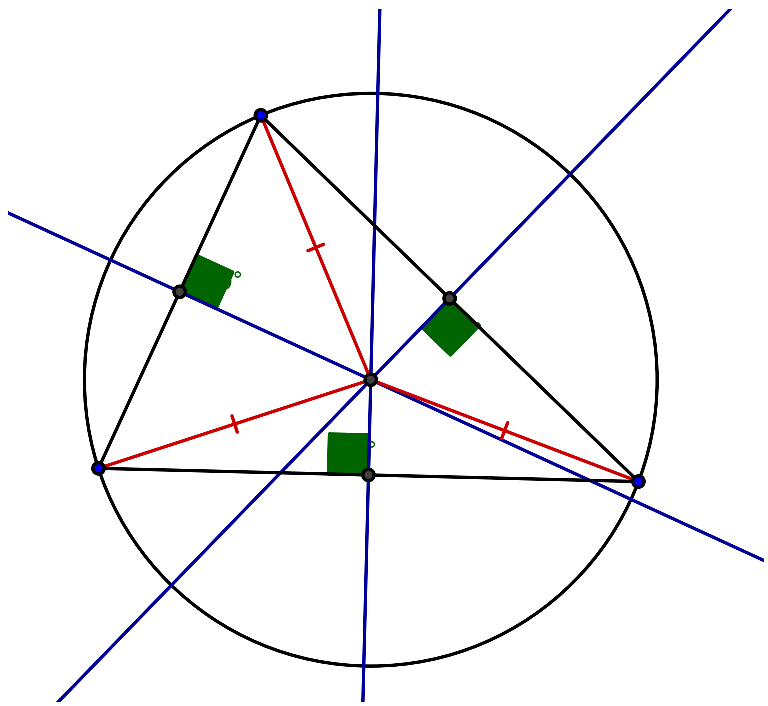
- Konstruoidaan annetulle kolmiolle kulman puolittajat. (Haetaan kyljiltä pisteet, jotka ovat yhtä kaukana kärjestä, yhdistetään nämä janaksi ja konstruoidaan tälle janalle keskinormaali.)
- Piirretään kolmion kyljelle kulmien puolittajien leikkauspisteen kautta

kulkeva normaali. Valitaan tämä etäisyys ympyrän säteeksi ja keskipisteeksi siis kulmien puolittajien leikkauspiste.

- Konstruktio toimii, sillä kulman puolittajat leikkaavat samassa pisteessä (todistetaan tehtävässä 8) ja kulman puolittajan ominaisuus on, että etäisyys toisesta kyljestä on jokaisessa pisteessä sama kuin toisesta (todistetaan niin ikään tehtävässä 8).

2. Piirrä kolmion ympäri piirretty ympyrä.

Ratkaisu.

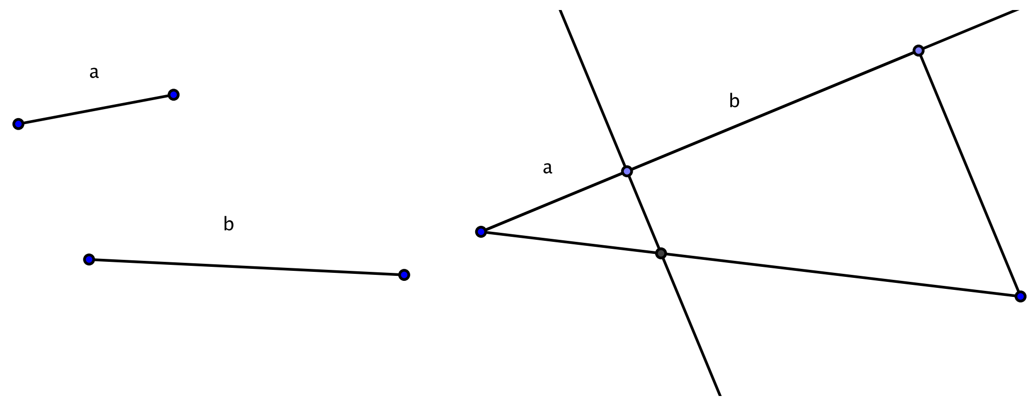


- Konstruoidaan kullekin kolmion kyljelle keskinormaalit.
- Keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä ja etäisyys jokaiseen kolmion kärkeen on sama (sks).
- Valitaan siis keskipisteeksi keskinormaalien leikkauspiste ja säteeksi leikkauspisteen etäisyys kolmion kärjestä.

3. Jaa jana kahden annetun janan suhteessa. Lisäkysymys: Mitä tarkoittaa sisä- ja ulkopuolinen jako?

Ratkaisu.

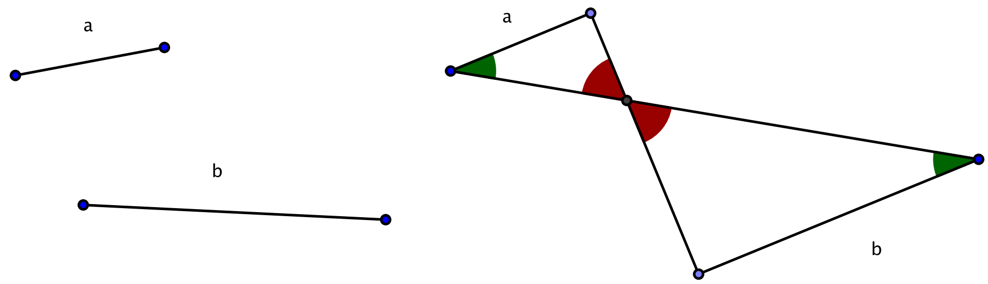
Tapa 1:



- Siirretään kuvan mukaisesti annetut janat a ja b (joiden suhteessa kolmas annettu jana jaetaan) kolmannen janan toisesta päätepisteestä alkavalle puolisuoralle.
- Piirretään suora janan b päätepisteen ja annetun kolmannen janan päätepisteen kautta (kuvan mukaisesti).
- Konstruoidaan janan a päätepisteen kautta kulkeva suora, joka on äsken piirretyn kanssa yhdensuuntainen (tehdään aluksi normaali ensimmäiselle suoralle, joka kulkee pisteen a kautta ja tälle uusi normaali)
- Saadaan yhdenmuotoiset kolmiot (kk), ja syntyvistä verrannoista saadaan haluttu suhde.

Tapa 2:

- Siirretään kuvan mukaisesti janat a ja b annetun kolmannen janan päätepisteisiin siten, että syntyvät kulmat ovat yhtä suuret.a



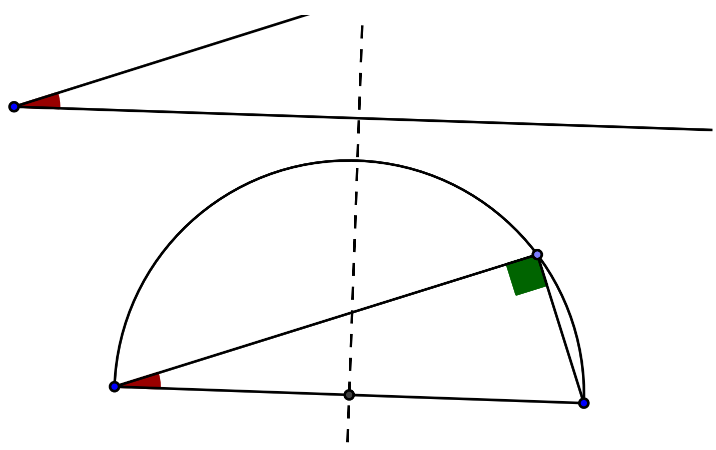
- Yhdistetään janojen a ja b päätepisteet, jolloin syntyy kaksi yhdenmuotoista kolmiota (kk).

- Kolmannelle janalle syntyvä jako on nyt haluttu.

Lisäkysymykseen: sanotaan, että jos piste X on janalla AB ja jakaa janan suhteessa $XA : XB = p : q$, se jakaa janan sisäpuolisesti suhteessa $p : q$. Jos taas piste Y on janan AB jatkeella ja jakaa janan suhteessa $YA : YB = p : q$, se jakaa janan ulkopuolisesti suhteessa $p : q$.

4. Piirrä suorakulmainen kolmio, jolla on hypotenuusana annettu jana ja annettu terävä kulma.

Ratkaisu.



- Siirretään annettu kulma annetulle janalle. (Tai helpommin: siirretään annettu jana annetun kulman kyljelle.)

- Konstruoidaan janan keskinormaali, jolloin saadaan janan keskipiste.

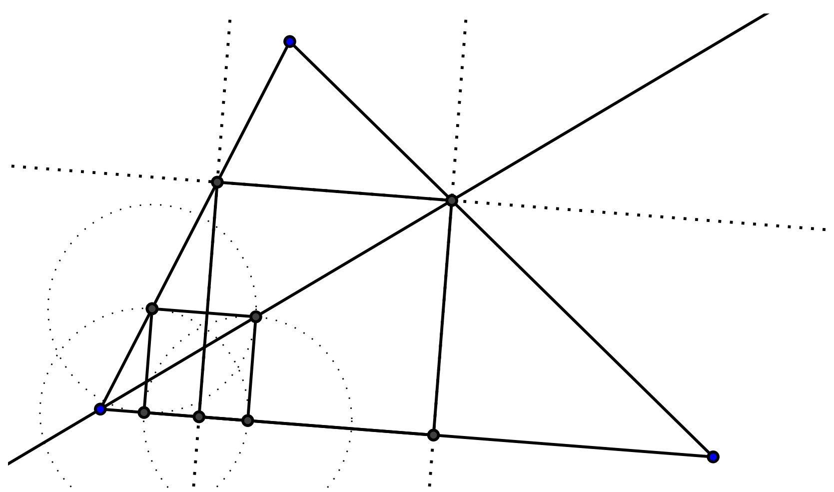
- Piirretään (puoli)ympyrä, jonka keskipiste on annetun janan keskipiste ja säde puolet annetusta janasta.

- Piirretään kolmio puoliympyrän ja annetun kylman kyljen leikkauspisteen ja annetun janan päätepisteiden kautta.

- Nyt syntyvä kolmio on suorakulmainen (Thaleen lause). (Thaleen lause voidaan todistaa, kun huomataan, että piirrettäessä ko. puoliympyrän kehän pisteeltä jana "halkaisijajanan" keksipisteeseen, saadaan kaksi tasakylkistä kolmiota...)

5. Piirrä annetun kolmion sisälle neliö niin, että sen yksi sivu on kolmion kyljellä ja kaksi kärkeä kolmion muilla sivuilla.

Ratkaisu.



- Konstruoidaan aluksi kuvan mukaisesti neliö kolmion nurkkaan.

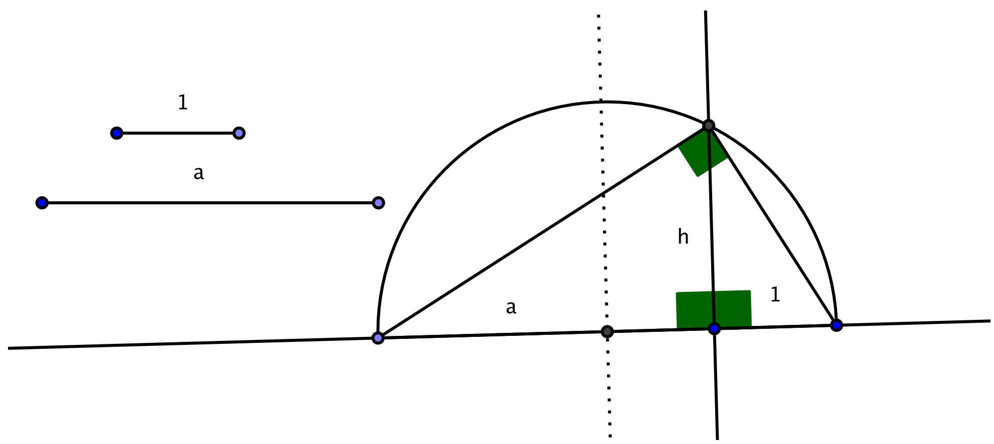
- Piirretään suora, joka kulkee kolmion nurkan ja neliön kärjen kautta kuvan mukaisesti.

- Piirretään kolmion kyljelle (kuvassa "pohjalle") normaali, joka kulkee piirretyn suoran ja kolmion kyljen leikkauspisteen kautta. Piirretään myös tälle normaalille saman pisteen kautta kulkeva normaali. Tämä leikkaa kolmion kolmannen kyljen.

- Syntyy haluttu neliö. (Miksi? Aluksi konstruoitiin neliö. Syntyvien yhdenmuotoisten kolmioden avulla voidaan näyttää, että myös jälkimmäisenä konstruoitu nelikulmio on neliö.)

6. Otetaan lähtökohdaksi jana, jonka pituus on 1 sekä jana, jonka pituus on a. Konstruoi jana, jonka pituus on luvun a neliöjuuri.

Ratkaisu.



- Siirretään yksikköjana ja jana, jonka pituus on a samalle suoralle kuvan mukaisesti.

- Etsitään keskipiste (konstruoimalla keskinormaali) ja piirretään puoliympyrä.

- Piirretään suoralle siirretyn janan, jonka pituus on a toisen päätepisteen (joka on siis sama kuin yksikköjanan toinen päätepiste) kautta kulkeva normaali.

- Saadaan suorakulmainen kolmio (kuten tehtävässä 4), mutta myös kaksi pienempää suorakulmaista kolmiota. Näistä molemmat ovat yhdenmuotoisia isomman kanssa (kk) ja siten myös keskenään.

- Merkitään pienempien suorakulmaisten kolmioiden toista kateettia h:lla. Nyt yhdenmuotoisuuden perusteella $1/h = h/a$, joten $h^2 = a$. Siispä jana, jonka pituus on h on haluttu jana.

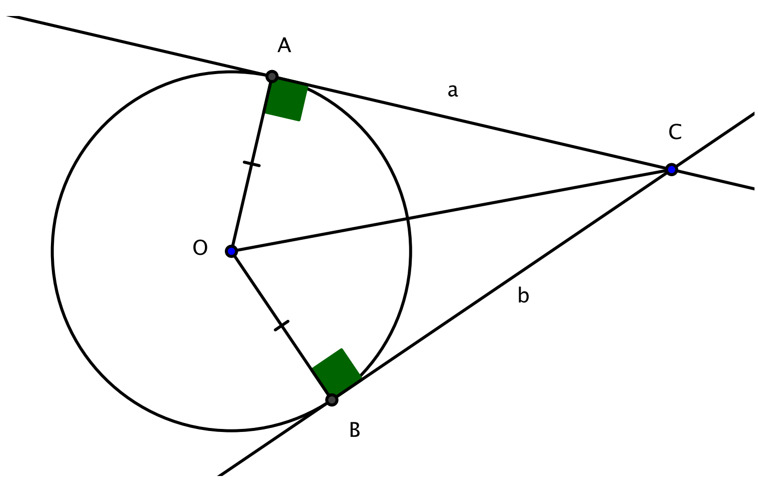
Huom. tehtävissä 7-8 käytetään yhtenevyyslausetta "suorakulmainen ssk". Todistetaan se tässä välissä.

Lause: Jos kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ on $BC \cong B'C'$ ja $AB \cong A'B'$ ja lisäksi kulmat $\angle BCA$ ja $\angle B'C'A'$ ovat suoria, niin kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat yhteneviä.

Todistus. (Lehtisen materiaalista) Piirretään kulma $C'B'A''$ eri puolelle suoraa $B'C'$ kuin A'. Jos $B'A' \cong BA$, niin kolmiot ABC ja $A''B'C'$ ovat yhteneviä (sks). Koska $\angle B'C'A'$ ja $\angle B'C'A''$ ovat suoria kulmia, A', C' ja A'' ovat samalla suoralla. Yhtenevyyslause ssk:n mukaan joko $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$ tai $\angle A'B'C'$ ja $\angle ABC$ eli $\angle A''B'C'$ ovat vieruskulmia. Jälkimmäisessä tapauksessa A', B' ja A'' ovat samalla suoralla. Mutta tällöin A', B' ja C' ovat kaikki samalla suoralla, joten $A'B'C'$ ei ole kolmio. Ristiriita, siis $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$ ja kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat yhteneviä (sks).

7. Todista: jos suorat a ja b leikkaavat toisensa pisteessä C ja sivuavat ympräää Γ pisteissä A ja B, niin $CA \cong CB$

Ratkaisu. Olkoon O ympyrän Γ keskipiste. Nyt oletuksien mukaan $OA \cong$

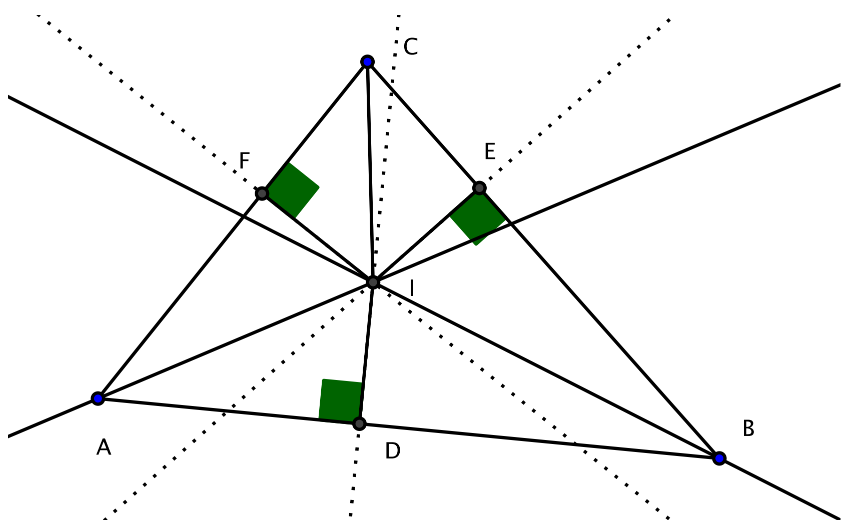


OB, sillä pisteet A ja B olivat ympyrän kehällä. Lisäksi $OA \perp AC (= a)$ ja $OB \perp BC (= b)$ (lause 1.6.2). Koska tämän lisäksi kolmioilla AOC ja BOC

on yhteinen sivu OC, saadaan $\triangle AOC \cong \triangle BOC$ ("suorakulmainen ssk"). Näin ollen pätee $AC \cong BD$, mikä oli todistettava

8. Todista, että kolmion ABC kulmien puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä I.

Ratkaisu. Olkoon I kulmien $\angle CAB$ ja $\angle ABC$ puolittajien leikkauspiste.



Halutaan osoittaa, että se suora joka kulkee pisteiden C ja I kautta on kulman $\angle ACB$ puolittaja.

Olkoon D se janan AB piste, jolle pätee $ID \perp AB$ ja vastaavasti E ja F siten, että $IE \perp BC$ ja $IF \perp AC$. Koska AI ja BI olivat kulman puolittajia saadaan $\triangle ADI \cong \triangle AFI$ (kks) ja vastaavasti $\triangle BDI \cong \triangle BEI$ (kks).

Äsken saatujen yhtenevyyksien perusteella $FI \cong DI$ ja $DI \cong DE$. Siispä $FI \cong DE$. Mutta nyt $\triangle CFI \cong \triangle CEI$ ("suorakulmainen ssk"), mikä tarkoittaa että CI puolittaa kulman $\angle FCE = \angle ACB$.