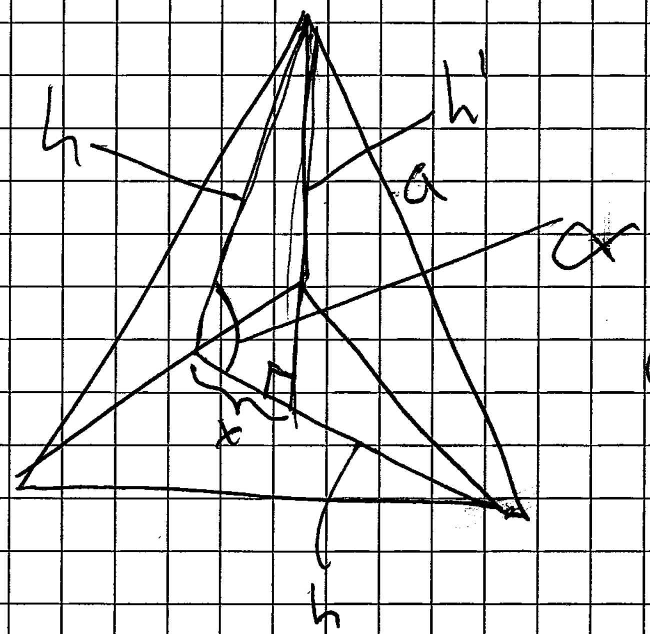
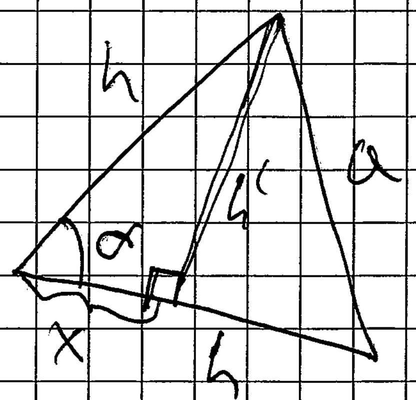
1.



Geometria 2012
Harjoitus 5
Ratkaisuja (Jari H)

On ratkaistava kuvasta x ja h'.

Harjoituksissa 4 saatiin: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ja $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.



Nyt saadaan:

$$\cos\alpha = \frac{x}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{h} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}h.$$

(~~Korkeus~~ Korkeus jana osuu itse asiassa pohjatahkon ~~korkeus janojen~~ keskijanojen leikkauspisteeseen)

Ja edelleen:

$$x^2 + h'^2 = h^2$$

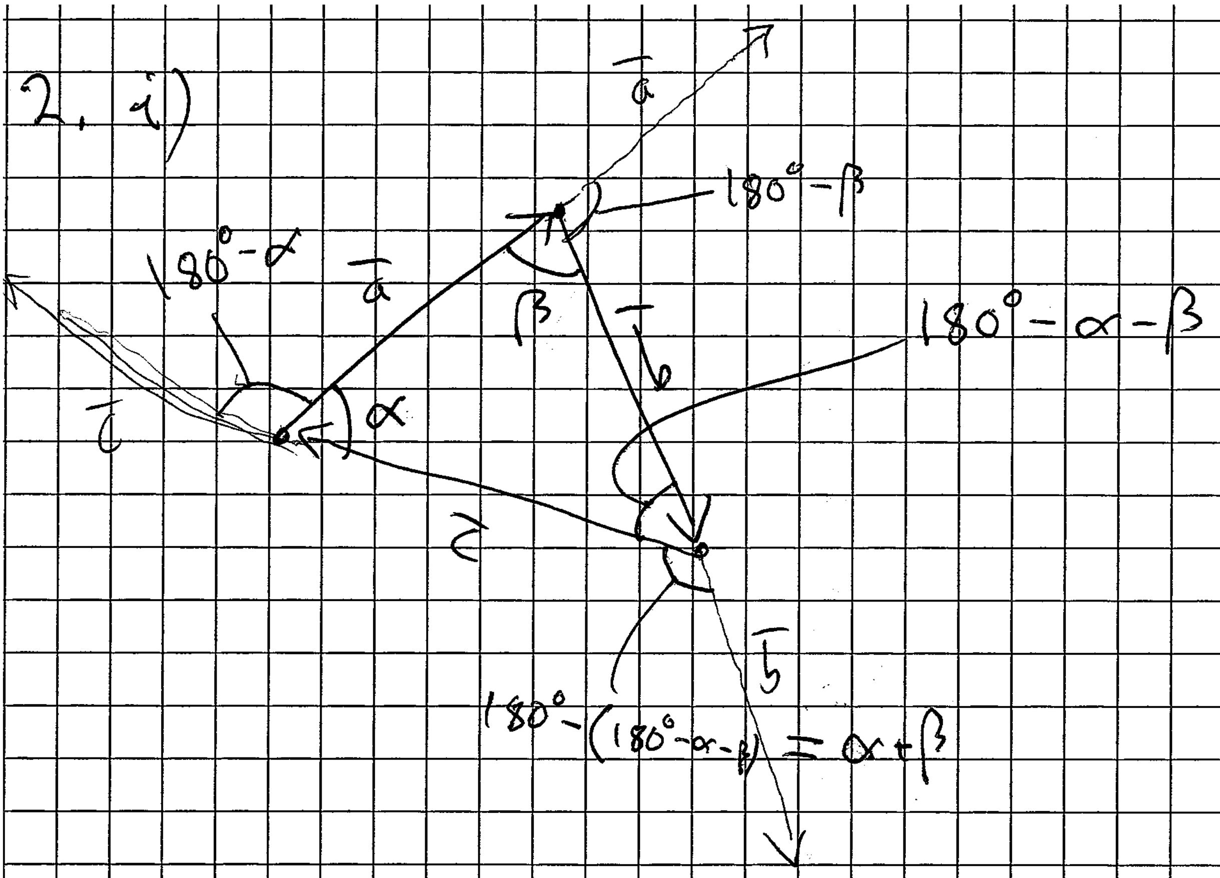
$$\Leftrightarrow h'^2 = h^2 - \frac{1}{9}h^2$$

$$\Leftrightarrow h'^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow h'^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{36}a^2 = \frac{24}{36}a^2$$

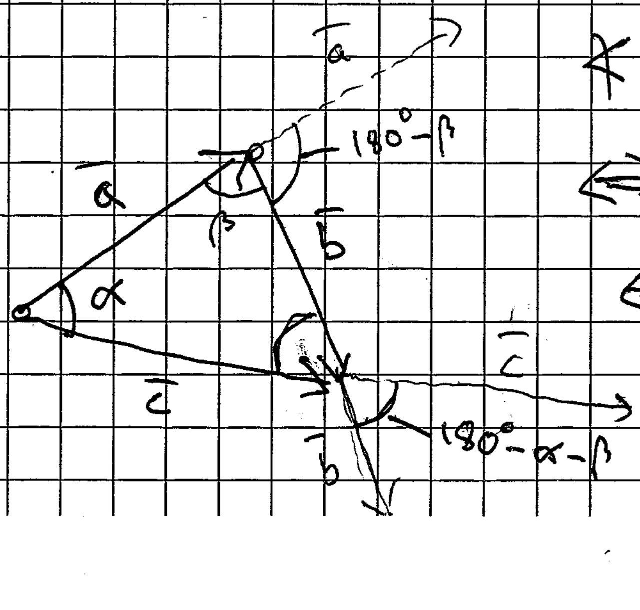
$$\Leftrightarrow h' = \frac{\sqrt{24}}{6}a = \frac{2\sqrt{6}}{6}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

2. i)



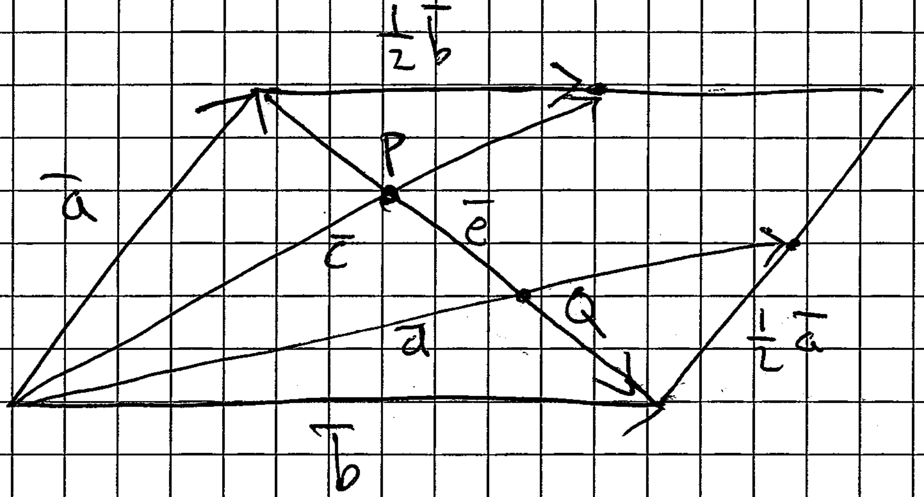
$$\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}) + \sphericalangle(\bar{b},\bar{c}) + \sphericalangle(\bar{a},\bar{c})$$
$$= (180° - \beta) + (\alpha + \beta) + (180° - \alpha) = 360°$$

ii) Asettamalla vektorit edellisen kohdan tapaan, kulmien summa ei ole 180° millään kolmiolla. Osoitetaan, että jos kaksi vektoreista asetetaan "osoittamaan samaan pisteeseen", kulmien summa on 180° jos ja vain jos kolmio on suorakulmainen.



$$\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}) + \sphericalangle(\bar{b},\bar{c}) + \sphericalangle(\bar{a},\bar{c}) = 180°$$
$$\Longleftrightarrow 180° - \beta + (180° - \alpha - \beta) + \alpha = 180°$$
$$\Longleftrightarrow 360° - 2\beta = 180°$$
$$\Longleftrightarrow 2\beta = 180°$$
$$\Longleftrightarrow \beta = 40°.$$

3.



Pisteeseen P päädytään kulkemalla $r\bar{c}$ $(r \in \mathbb{R})$ ja toisaalta $t\bar{e}$ $(t \in \mathbb{R})$. Pyritään osoittamaan, että $t = \frac{1}{3}$.

Ilmaistaan $\bar{c}$ ja $\bar{e}$ vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla:

$$\bar{c} = \left(\bar{a} + \tfrac{1}{2}\bar{b}\right) \quad \text{ja} \quad \bar{e} = \left(\bar{b} - \bar{a}\right).$$

On oltava:

$$r\left(\bar{a} + \tfrac{1}{2}\bar{b}\right) = \bar{a} + t\left(\bar{b} - \bar{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad r\bar{a} + \frac{r}{2}\bar{b} = a + t\bar{b} - t\bar{a}$$

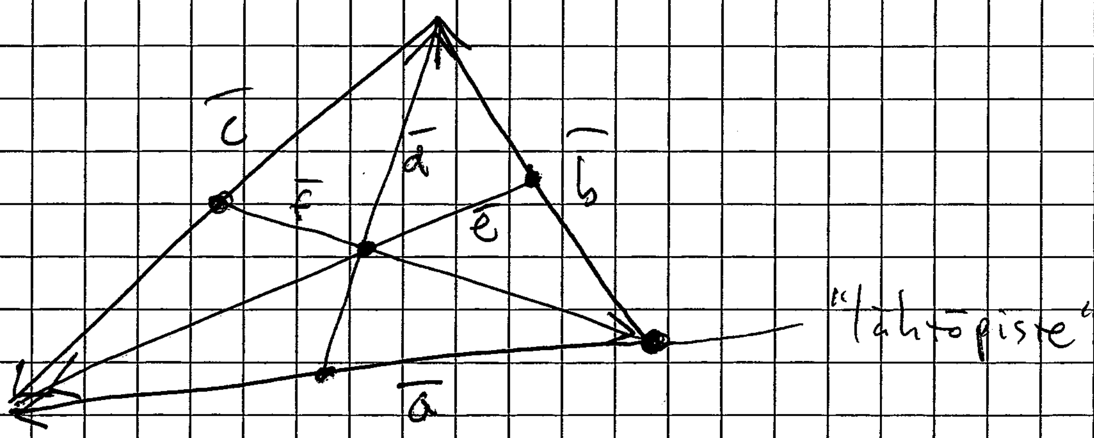
$$\Leftrightarrow \quad r\bar{a} + \frac{r}{2}\bar{b} = (1-t)\bar{a} + t\bar{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 1 - t \\ t = \dfrac{r}{2} \end{cases}.$$

Saadaan $t = \dfrac{1-t}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Vastaavalla menettelyllä saataisiin, että pisteeseen Q päädytään, kun kuljetaan $\frac{2}{3}\bar{e}$.

4.



On osoitettava $r\bar{e} = r\bar{f} = r\bar{d}$, missä $r = \frac{1}{3}$.

Osoitetaan $\frac{1}{3}\bar{d} = \frac{1}{3}\bar{e}$.

Ilmaistaan $\bar{d}$ ja $\bar{e}$ vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla:

$$\bar{d} = \left(-\frac{\bar{a}}{2} + \bar{b}\right), \quad \bar{e} = \left(-\frac{\bar{b}}{2} + \bar{a}\right)$$

Nyt on oltava:

$$\frac{1}{2}\bar{a} + r\left(-\frac{\bar{a}}{2} + \bar{b}\right) = \frac{1}{2}\bar{b} + t\left(-\frac{1}{2}\bar{b} + \bar{a}\right)$$

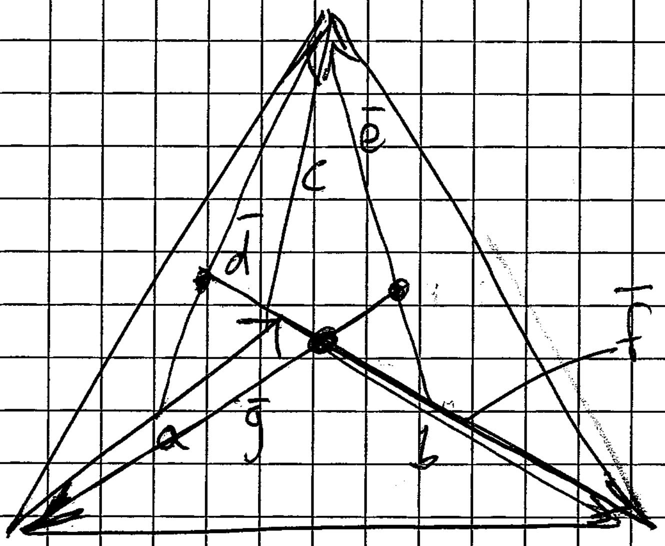
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{r}{2}\bar{a} + r\bar{b} = \frac{1}{2}\bar{b} - \frac{t}{2}\bar{b} + t\bar{a}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{2}\right)\bar{a} + r\bar{b} = t\bar{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)\bar{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{r}{2} = t \\ r = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$$, josta saadaan $r = t = \frac{1}{3}$.

Yhtäsuuruus $\frac{1}{3}\bar{f} = \frac{1}{3}\bar{d}$ voitaisiin osoittaa samaan tapaan, jolloin saadaan väite.

5.



(Kuvassa $\bar a$ ja $\bar b$ vektorit ovat pohjatahkon särmät, $\bar c$ sivutahkon särmä, $\bar d$ ja $\bar e$ keskijanat sekä $\bar f$ ja $\bar g$ kysytyt yhdysjanat)

Edellisen tehtävän tietoa ja menetelmää käyttäen halutaan näyttää, että

$$\frac{1}{2}\bar a+\frac{1}{3}\bar d+r\bar f=\bar a+\frac{1}{2}\bar b+\frac{1}{3}\bar e+t\bar g$$

pätee joss $r=t=\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{2}\bar a+\frac{1}{3}\bar d+r\bar f=\bar a+\frac{1}{2}\bar b+\frac{1}{3}\bar e+t\bar g$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\bar a+\frac{1}{3}\bar d+r\left(-\frac{1}{3}\bar d+\frac{1}{2}\bar a+\bar b\right)=\bar a+\frac{1}{2}\bar b+\frac{1}{3}\bar e+t\left(-\frac{1}{3}\bar e-\frac{1}{2}\bar b-\bar a\right)$$

... sijoitetaan $\bar d=\frac{1}{2}\bar a+\bar c$ ja $\bar e=\left(-\frac{1}{2}\bar b+\bar c\right)$

ja saadaan (lopulta)

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)\bar a+r\bar b+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r\right)\bar c=(1-t)\bar a+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}t\right)\bar b+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}t\right)\bar c$$

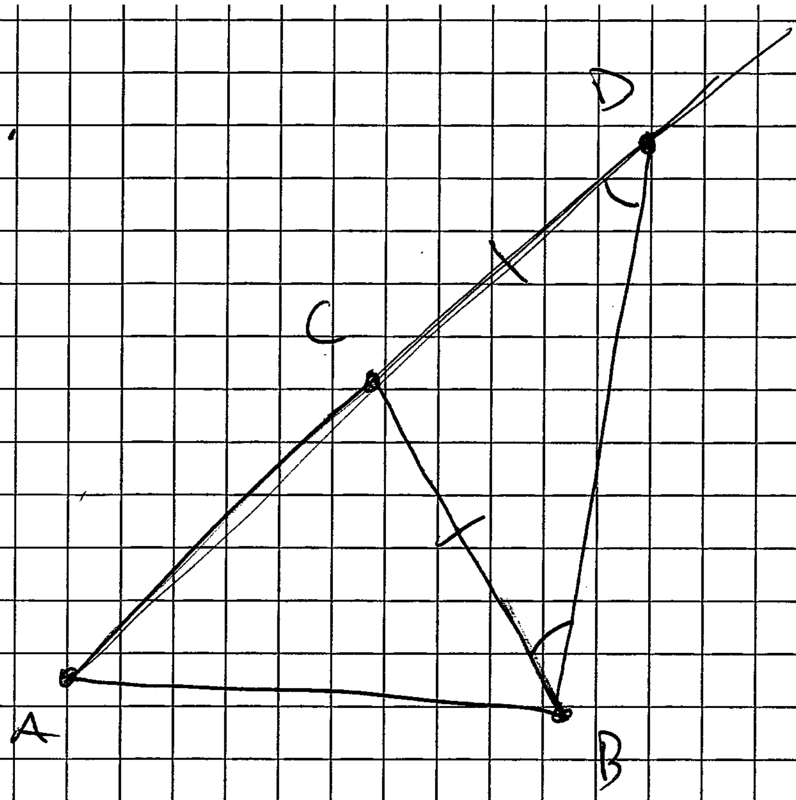
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r=1-t\\ r=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}t\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}r=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}t\end{cases},$$

joista saadaan

$$r=t=\frac{1}{4}.$$

(Kolmas yhdysjana pitäisi vielä käsitellä samoin)

6.



Valitaan puolisuoralta $\overrightarrow{AC}$ piste D siten, että

$CD \cong BC$.

Tällöin $AD = AC + BC$.

On osoitettava, että $AD > AB$.

Kolmio BCD on tasakylkinen, joten $\sphericalangle CBD \cong \sphericalangle CDB$.

Koska piste C on kulman $\sphericalangle ABD$ aukeamassa pätee: $\sphericalangle ABD > \sphericalangle CBD \cong \sphericalangle CDB \cong \sphericalangle ADB$.

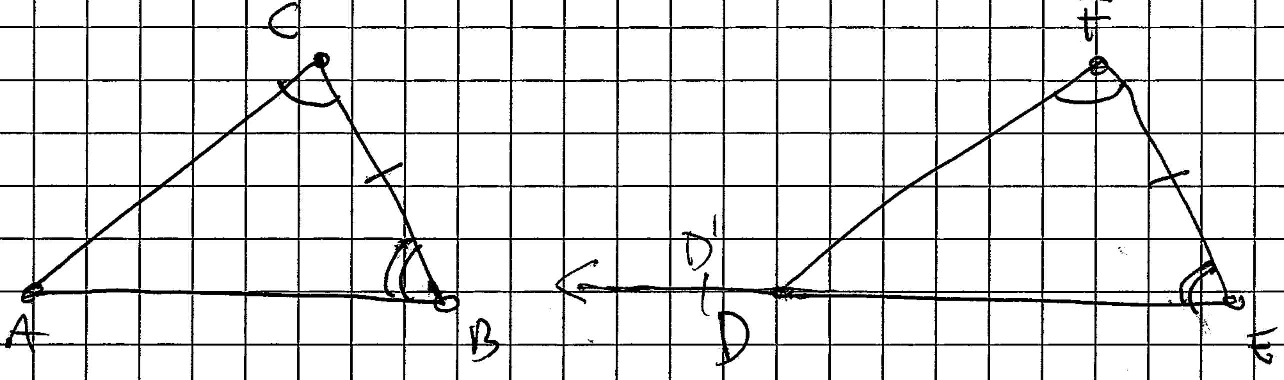
Nyt lauseen 1.4.11.(*) perusteella:

$AD > AB$.

(*) "Kolmiossa pienempää kulmaa vastaa pienempi sivu"

7. Ol. $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$, $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle DFE$ ja $BC \cong EF$

Väite: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



Valitaan puolisuoralta $\overrightarrow{ED}$ sellainen piste D', että $ED' \cong AB$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle D'EF$ (aksiooma 12, sks).

Halutaan osoittaa, että $D = D'$.

Koska $\triangle ABC \cong \triangle D'EF$, niin $\sphericalangle BCA \cong EFD'$.

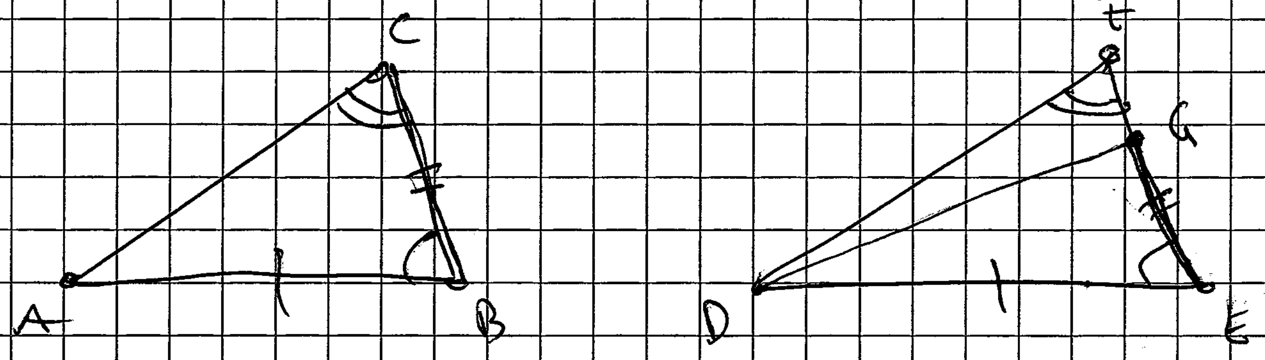
Tiedettiin toisaalta, että $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle EFD$.

Nyt koska D ja D' ovat samalla puolella suoraa EF, on oltava $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FD'}$ (aksiooma 10).

~~Siis~~ Nyt koska piste F ei ole suoralla ED, on oltava $D = D'$.

8. ol. $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$, $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle DFE$ ja $AB \cong DE$.

väite: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



Tehdään vastaoletus: Joko $BC < EF$ tai $BC > EF$.

oletetaan $BC < EF$. (toinen tapaus on olellisesti sama)

Olkoon G se janan EF piste, jolle pätee:

$BC \cong EG$.

Nyt $\triangle ABC$ ja $\triangle DEG$ ovat yhtenevät (aksiooma 12, sks)

Näin ollen $\sphericalangle EGD \cong \sphericalangle BCA$.

Mutta toisaalta tiedettiin, että $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle EFD$.

Siis $\sphericalangle EGD \cong \sphericalangle EFD$.

Saamme ristiriidan lauseen 1.6.10* perusteella, sillä lauseen mukaan pitäisi olla

~~$\sphericalangle E$~~ $\sphericalangle EGD > \sphericalangle EFD$,

koska $\sphericalangle EGD$ on kulman $\sphericalangle DGF$ vieruskulma.

* "Kolmion kulmien vieruskulmat ovat toisia kulmia suuremmat"