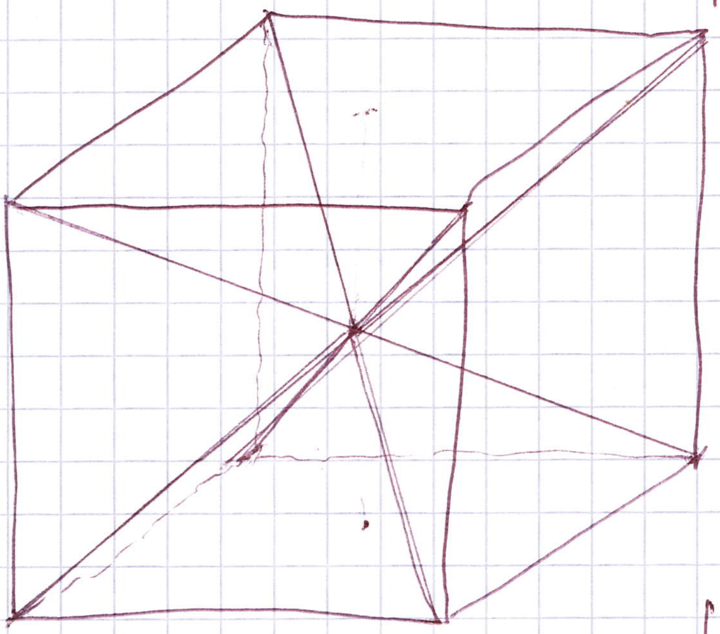
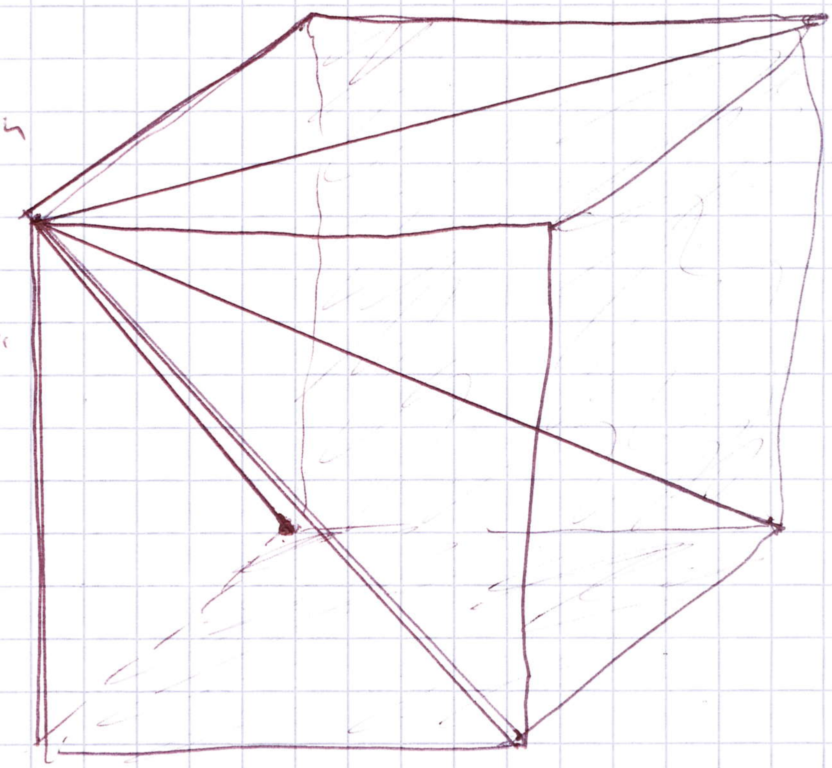
Geometria 2012
Harjoitus 4
Ratkaisuja (Jani H.)

1.



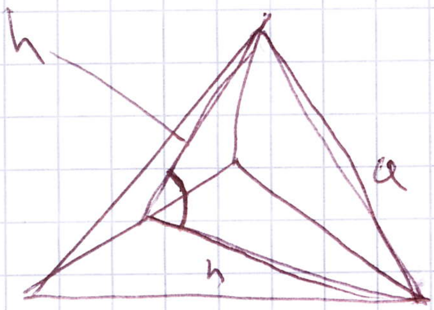
Avaruuslävistäjien avulla saadaan jaettua kuutio kuuteen pyramidiin, joiden pohjat muodostuvat kuution tahkoista ja joiden korkeus on puolet kuution särmästä.

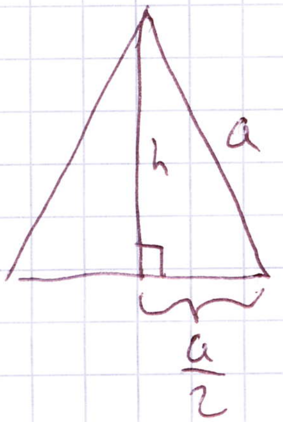


Toisessa kuvassa kuutio jaetaan kolmeen vinoon pyramidiin, joissa pohjina on kuution "pohjatahko", "takaseinätahko" ja "oikea sivutahko".

Näissä vastinosat ovat yhteneviä, yhteenlaskettu tilavuus on sama kuin kuution tilavuus.

2. Laskettava kuvan mukainen kulma:





$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

Kosinilause:

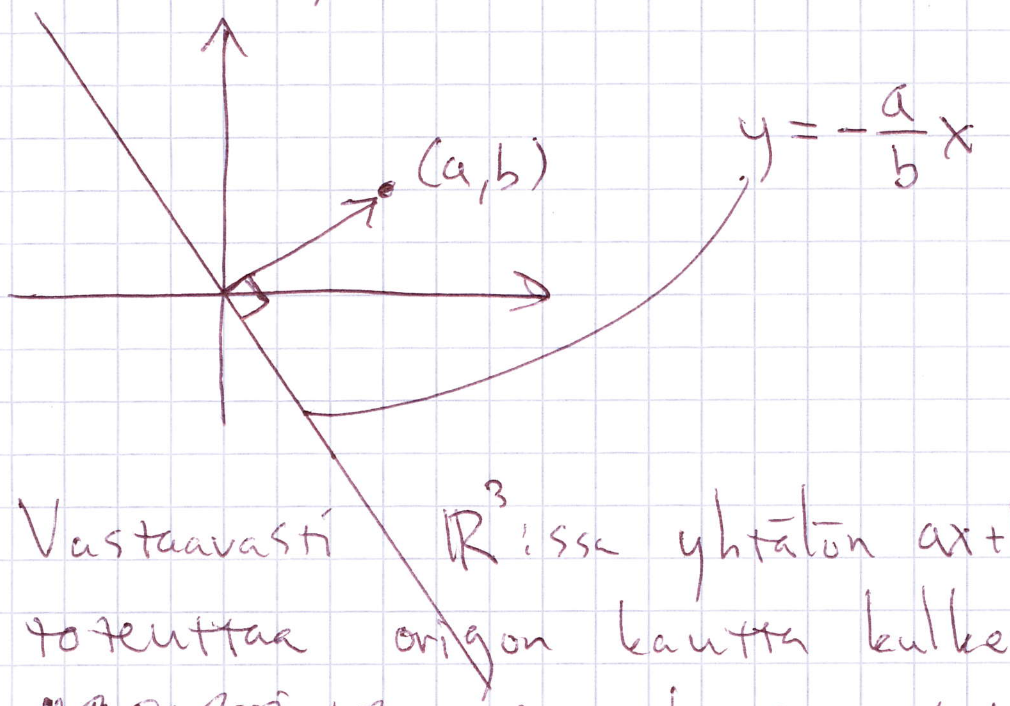
$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos \alpha = 1 - \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}.$$

Siis on oltava $\alpha \approx 70{,}5$.

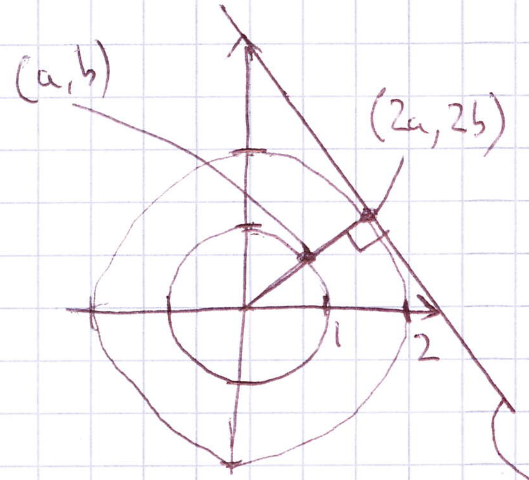
3. i) Yhtälön $ax+by=0$ toteuttavat pisteet (x,y) ovat tietyn suoran pisteitä. Itse asiassa sellaisen suoran, joka kulkee origon kautta ja jonka normaalivektori on $a\bar{i}+b\bar{j}$. Tämän takia suoran yhtälön yleistä muotoa $ax+bx+c=0$ kutsutaan myös normaalimuodoksi.

Pistetuloon tämä liittyy tietysti siten, että vaatimus $ax+by=0$ tarkoittaa, että $(x,y)\cdot(a,b)=0$.



ii) Vastaavasti $\mathbb{R}^3$:ssa yhtälön $ax+by+cz=0$ toteuttaa origon kautta kulkevan ~~tason pisteet~~ ja vektoria $a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ kohtisuorassa olevan tason pisteet.

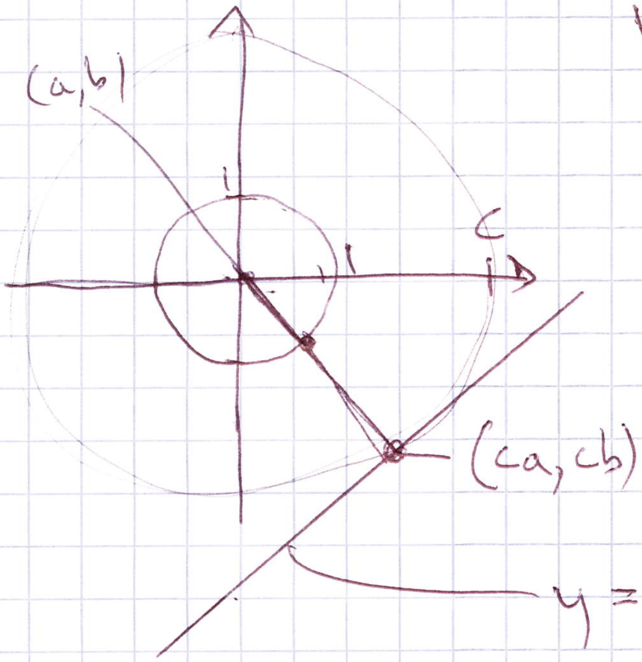
4. a) ol. $a^2+b^2=1$.



Yhtälön $ax+by=2$ toteuttavat pisteet ovat suoralla, jonka normaalivektori on $a\bar{i}+b\bar{j}$ ja johon etäisyys origosta on 2.

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{2}{b}$$

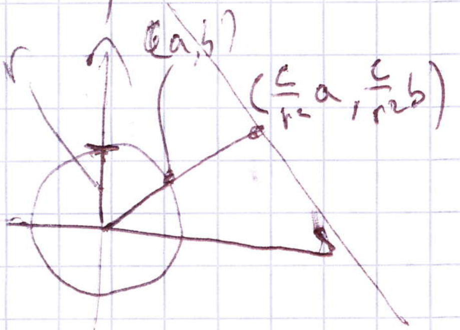
b) ol. $a^2+b^2=1$



Vastaavasti yhtälön $ax+by=c$ toteuttavat pisteet, jotka ovat suoralla, jonka normaalivektori on $a\bar{i}+b\bar{j}$ ja johon etäisyys origosta on c.

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

c) ol. $a^2+b^2=r^2$. Yleisesti yhtälön $ax+by=c$ toteuttavat pisteet, jotka ovat suoralla, jonka normaalivektori on $a\bar{i}+b\bar{j}$ ja johon etäisyys origosta on $\frac{c}{r^2}$.



5. Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax+by+c=0$ saadaan lausekkeella $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

On siis etsittävä sellaiset pisteet (x,y), joille pätee:

$$\frac{|3x+4y-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2\frac{|x-y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{2}\,|3x+4y-12| = 10\,|x-y-1|.$$

On siis oltava

$$3\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y - 12\sqrt{2} = 10x - 10y - 10$$

eli $(3\sqrt{2}-10)x + (10+4\sqrt{2})y + 10 - 12\sqrt{2} = 0$

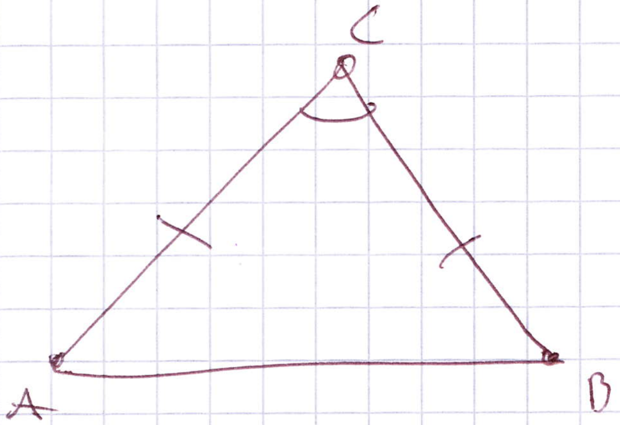
tai $$3\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y - 12\sqrt{2} = -10x + 10y + 10$$

eli $(3\sqrt{2}+10)x + (4\sqrt{2}-10)y - 12\sqrt{2} - 10 = 0.$

Saadaan siis kaksi suoran yhtälöä.

6.01. Kolmiossa ABC on $AC \cong BC$

Väite: $\measuredangle CAB \cong \measuredangle CBA$



Osoitetaan, että kolmiot CBA ja CAB ovat yhtenevät, jolloin kolmion yhtenevyyden määritelmän perusteella: $\measuredangle CBA \cong \measuredangle CAB$

$\Leftrightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle CBA.$

Aksiooman 12 perusteella kolmiot CBA ja CAB ovat yhtenevät, jos $CB \cong CA$, $CA \cong CB$

ja $\measuredangle BCA \cong \measuredangle ACB$.

Mutta nämä pätevät oletuksen mukaan, sillä $AC \cong BC \Rightarrow BC \cong AC$

ja $\measuredangle BCA \cong \measuredangle ACB$.

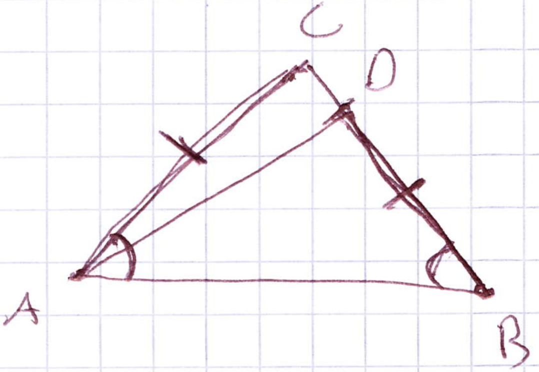
7. ol. Kolmiossa ABC on $\sphericalangle CAB \cong CBA$

väite: $AC \cong BC$.

tod: tehdään vastaoletus: joko $AC < BC$ tai $BC < AC$.

Oletetaan ensin, että $AC < BC$.

Tällöin janalla BC on piste D s.e. $BD \cong AC$



(kolmiot)

Nyt CAB ja DBA yhtenevät (sks).

Siispä $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle CBA$.

Koska piste D on janalla BC, puolisuora $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\sphericalangle CAB$ aukeamassa.

Näin ollen $\sphericalangle DAB < \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CBA \cong \sphericalangle DAB$.

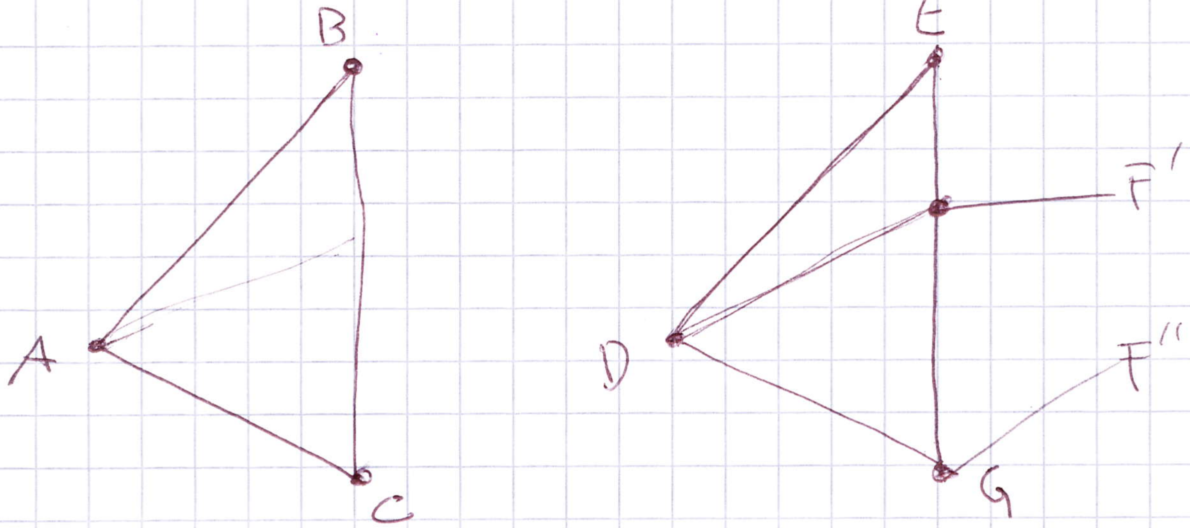
Ristiriita!

Tapaus $BC < AC$ menisi täsmälleen samoin.

8. ol. $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$.

väite: $ABC \cong DEF$ tai $\measuredangle ACB$ ja $\measuredangle DFE$ ovat vieruskulmia

tod: Valitaan puolisuoralta $\overrightarrow{EF}$ piste G siten, että $EG \cong BC$. Täll. $ABC \cong DEG$ (sks).



Jos $F = G$, väite pätee sillä tällöin $ABC \cong DEF$.

Jos taas $F \neq G$, kolmio DGF on tasakylkinen, sillä

$AC \cong DG$ ($ABC \cong DEG$)

ja $AC \cong DF$ (oletus).

Siispä (teht 6 perusteella) $\measuredangle DGF \cong DFG$.

Kulman $\measuredangle DFE$ vieruskulma on kulma $\measuredangle DFG$.

Mutta $\measuredangle DFG \cong \measuredangle DGF \cong \measuredangle EGD \cong \measuredangle BCA$.

Siis $\measuredangle DFE$ ja $\measuredangle ACB$ ovat vieruskulmia.