**Geometria / 2. kurssikoe ti 8.5.2012 / ratkaisut ja arvostelukommentit / 2 sivua ja kuvasivu**
*Nämä ratkaisut ovat ilmoitustaululla ja kurssin kotisivulla (la 19.5.2012).*
**Arvostelija:** Jouni Luukkainen (D319) ti 14–15 ja pe 9–10 (saa käydä tapaamassa koska tahansa).

**1.** *Onko olemassa kolmiota, jonka kahden kulman puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?*

**Ratk.** Ei ole olemassa. Olkoon nimittäin $ABC$ kolmio, jonka kärjissä $A$ ja $B$ olevien kulmien puolittajat leikatkoot pisteessä $M$ kulmassa $\delta = \angle AMB$. Merkitään $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ ja $\gamma = \angle ACB$. Kolmion $ABC$ kulmista saadaan, että $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, ja kolmion $ABM$ kulmista taas, että $\alpha/2 + \beta/2 + \delta = \pi$. Täten $\delta - \gamma/2 = \pi/2$. Jatko kahdella eri tavalla:

**Suora tod.** Koska $\gamma > 0$, niin $\delta > \pi/2$.

**Epäsuora tod.** Jos $\delta = \pi/2$, niin $\gamma = 0$, joka on mahdotonta.

**2.** *Kolmiossa $ABC$ merkitään kulmaa $\angle BAC$ kirjaimella $\alpha$ ja kärjen $A$ vastaisen sivun pituutta kirjaimella $a$. Olkoon $R$ kolmion $ABC$ ympäri piirretyn ympyrän säde. Osoita, että tällöin pätee $2R \sin\alpha = a$.*

**Vihje:** Tarkastele apukolmiota $DBC$, jossa $DC$ on kolmion $ABC$ ympäri piirretyn ympyrän halkaisija. Huom. Tehtävässä on kyse sinilauseen todistamisesta. Siksi sinilauseeseen EI saa vedota.

**Ratkaisu ja pisteiden kertyminen.** Olkoon $\Gamma$ kolmion $ABC$ ympäri piirretty ympyrä eli se, jolla $A, B, C \in \Gamma$. Olkoon $DC$ ympyrän $\Gamma$ halkaisija.

Tapauksessa $B = D$ eli tapauksessa $\alpha = \pi/2$ on $a = 2R$, joten väite pätee. (Tämän rajatapauksen sai ohittaa ilman sakkoa.)

Oletetaan sitten, että $B \neq D$. Tarkastellaan kolmiota $DBC$. Nyt $\angle DBC = \pi/2$ ympyrän $\Gamma$ halkaisijaa $DC$ vastaavana kehäkulmana (**1p**). Olkoon $\beta = \angle BDC$. Tällöin

$$\sin\beta = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{a}{2R} \qquad \text{eli} \qquad a = 2R\sin\beta \quad (\mathbf{3p}).$$

Riittää siis osoittaa, että $\sin\beta = \sin\alpha$.

Tapauksessa, jossa $D$ ja $A$ ovat samalla puolella jännettä $BC$ eli jossa $\alpha < \pi/2$, ovat kulmat $BDC$ ja $BAC$ samaa jännettä $BC$ samalla puolella vastaavia $\Gamma$:n kehäkulmia, joten $\beta = \alpha$ ja siis $\sin\beta = \sin\alpha$ (**5p**).

Tapauksessa, jossa $D$ ja $A$ ovat eri puolilla jännettä $BC$ eli jossa $\alpha > \pi/2$, ovat kulmat $BDC$ ja $BAC$ samaa jännettä $BC$ eri puolilla vastaavia $\Gamma$:n kehäkulmia, joten $\beta = \pi - \alpha$ ja siis nytkin $\sin\beta = \sin\alpha$ (**6p**).

**Huom.** Vain yksi huomasi molemmat tapaukset $\alpha$:n suhteen, ja hänen lisäkseen tylpän kulman $\alpha$ tapauksen vain yksi muu, apukolmiota käyttämätön.

**3.** *Jos ympyrän keskipiste on $O$ ja säde $r$, niin inversio tämän ympyrän suhteen kuvaa pisteen $A$ sellaiselle puolisuoran $OA$ pisteelle $A'$, että yhtälö $|OA||OA'| = r^2$ toteutuu. Tarkastellaan inversiota ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ suhteen.*

**(a)** *Määritä pisteen $(1, -1)$ kuvapiste tässä inversiossa.*

**(b)** *Määritä pisteen $(x, x-2)$ kuvapiste tässä inversiossa.*

**Ratk. (a)** Nyt $O = (0, 0)$, $r = 1$ ja $A = (1, -1)$, joten $|OA| = \sqrt{2}$. On siis oltava

$$|OA'| = \frac{1^2}{|OA|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{1}{2}|OA|,$$

joten $OA' = \frac{1}{2}OA = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ eli $A' = \underline{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}$ (**3p**).

**(b)** Jos $x \in \mathbb{R}$ ja $A = (x, x-2)$, niin

$$A' = OA' = |OA'|\frac{OA}{|OA|} = \frac{1^2}{|OA|}\frac{OA}{|OA|} = \frac{OA}{|OA|^2} = \underline{\frac{(x, x-2)}{x^2 + (x-2)^2}} \quad (\mathbf{3p}).$$

**Huom. 1)** Tehtävän b)-kohdan ratkaisemisen sijasta usea oli esittänyt huomion, että pisteet $(x, x-2)$, kun $x \in \mathbb{R}$, muodostavat suoran $y = x - 2$, jonka pistettä $O$ lähin piste on $(1, -1)$, ja että suoran $y = x - 2$ (kun mukana on tason äärettömyyspiste) kuva inversiossa on siis ympyrä, jolla on halkaisijana jana $O$:sta pisteen $(1,-1)$ kuvapisteeseen $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, eli täten ympyrä $(x-\frac{1}{4})^2+(y+\frac{1}{4})^2=\frac{1}{8}$. Pisteitä ei tästä tullut.

**2)** Laskuharjoituksissa oli osoitettu, että inversiossa yksikköympyrän suhteen pisteen $(a,b)$ kuvapiste on $\big(a/(a^2+b^2), b/(a^2+b^2)\big)$, mutta jos tätä ei perustellut, vaan vain suoraan sovelsi, sai vain 1p+1p oikeista vastauksista; onneksi näitä tapauksia ei juuri ollut.

**4.** *Oletetaan, että $0<a<b$. Osoita, että joukko $\{(x,y) \mid y=ax^2\}$ on joukon $\{(x,y) \mid y=bx^2\}$ kuva eräässä homotetiassa. (Ne ovat siis yhdenmuotoiset.)*

**I ratk.** Joukot $P=\{(x,y) \mid y=ax^2\}$ ja $Q=\{(x,y) \mid y=bx^2\}$ ovat ylöspäin aukeavia paraabeleita, joiden huippu on origossa; $Q$ nousee jyrkemmin kuin $P$ eli jää $P$:n "sisään".

Osoitetaan, että origokeskinen homotetia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x.y) \mapsto \dfrac{b}{a}(x,y)$, on vaadittu. Tarkastellaan siksi mielivaltaista pistettä $(x,y)$ ja sen kuvapistettä $(u,v)=f(x,y)=\left(\dfrac{b}{a}x, \dfrac{b}{a}y\right)$. Tällöin

$$(x,y)\in Q \iff y=bx^2 \iff \frac{b}{a}y=\frac{b}{a}bx^2=a\left(\frac{b}{a}x\right)^2 \iff v=au^2 \iff (u,v)\in P.$$

Siis $fQ=P$.

**II ratk.** Tutkitaan, päteekö $fQ=P$ jollain $k>0$ origokeskiselle homotetialle $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto k(x,y)$. Huomataan, että kullakin $x\in\mathbb{R}\smallsetminus 0$ on

$$f(x,bx^2)=(kx,kbx^2)\in P \iff kbx^2=a(kx)^2 \iff kbx^2=ak^2x^2 \iff k=\frac{b}{a}.$$

Valitaan $k=b/a$. Tällöin siis $fQ\subset P$. Koska $f^{-1}$ on homotetia $(x,y)\mapsto k^{-1}(x,y)$, niin samoin perustein on $f^{-1}P\subset Q$ eli $P\subset fQ$. Täten $fQ=P$, eli $f$ on vaadittu.

**III ratk.** Kullakin $c\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ origon kautta kulkeva suora $y=cx$ leikkaa $Q$:n (origon lisäksi) pisteessä $(c/b, c^2/b)$ ja $P$:n (origon lisäksi) pisteessä $(c/a, c^2/a)$, ja leikkauspisteille pätee

$$\left(\frac{c}{a},\frac{c^2}{a}\right)=\left(\frac{b}{a}\frac{c}{b},\frac{b}{a}\frac{c^2}{b}\right)=\frac{b}{a}\left(\frac{c}{b},\frac{c^2}{b}\right).$$

Lisäksi suorat $y=0$ ja $x=0$ leikkaavat sekä $Q$:n että $P$:n origossa. Täten I ratkaisun $f$ on vaadittu homotetia.

**Huom. 1)** Tason homotetialle $A\mapsto A'$ keskuksena piste $O$ ja homotetiasuhteena $k>0$ oikea ehto on **vektorimuotoinen** yhtälö $OA'=k\cdot OA$ kaikilla $A\in\mathbb{R}^2$. Etäisyyksille kirjoitettu ehto $|OA'|=k|OA|$ kaikilla $A\in\mathbb{R}^2$ ei määrittele homotetiaa, vaan tarvitaan lisäksi ehto, että vektori $OA'$ on vektorin $OA$ suuntainen kaikilla $A\in\mathbb{R}^2$ eli että piste $A'$ on puolisuoralla $\overrightarrow{OA}$ kaikilla $A\neq O$ (tai että tietyt suorakulmaiset kolmiot, joiden kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaisia, ovat yhdenmuotoiset). Tällaisesta oikeasta homotetian käsitteen esittämisestä muodossa tai toisessa sai **3p**, vaikka sitä ei olisi edes mitenkään osannut kytkeä paraabeleihin $P$ ja $Q$. Tämän sijasta maininta homotetiakeskuksesta $O=(0,0)$ tuotti **1p**. Samoin yksinään riittämätön ehto $|OA'|=k|OA|$ tuotti **1p**.

**2)** Moni oli piirtänyt mallikuvion, jossa $P$ olikin $Q$:n sisässä, mutta tämä sotki koko ratkaisun, koska se ehdotti homotetiasuhteelle $k$ ehtoa $k<1$ ja siis yritettä $k=a/b$, joka ei tietenkään voinut toimia.

**3)** Moni vetosi tulokseen $\dfrac{a}{b}bx^2=ax^2$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$, mutta tämä osoitti vain, että $gQ=P$ tason litistyskuvaukselle $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto\left(x,\dfrac{a}{b}y\right)$, $y$-akselin suuntaan, eikä $g$ ole edes yhdenmuotoisuuskuvaus. Yhden ratkaisu viittasi tulokseen, että $hQ=P$ tason venytyskuvaukselle $h\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}x, y\right)$, $x$-akselin suuntaan. Tällaisesta kuvauksesta ei pisteitä tullut.