Pitkä matematiikka 23.3.2012, ratkaisut:

1. **a)** $x^2 - x - 6 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$. Siis $x = -2$ tai $x = 3$.

b) $\dfrac{x}{6} - \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{7}{9} = 0 \Longleftrightarrow 3x - 9(x-3) - 2 \cdot 7 = 0 \Longleftrightarrow -6x + 13 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{13}{6}$.

c) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2}{2} - 2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 2$.

Vastaus: **a)** $x = -2$ tai $x = 3$, **b)** $x = \frac{13}{6}$, **c)** $x = -2$ tai $x = 2$.

2. **a)** $\dfrac{15}{4} - (\dfrac{6}{3})^2 = \dfrac{15}{4} - 2^2 = \dfrac{15 - 4 \cdot 4}{4} = -\dfrac{1}{4}$.

b) $\sqrt{6 \cdot (3!)} - 6 = \sqrt{6 \cdot 6} - 6 = 6 - 6 = 0$.

c) $\ln \dfrac{x}{2} + \ln 2 = \ln x - \ln 2 + \ln 2 = \ln x$.

d) $\sin^2 x + \cos^2(x + 2\pi) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

e) $\int_0^1 (x+1)dx = \Big/_{0}^{1} \frac{1}{2}x^2 + x = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

f) $f'(x) = D(4e^{2x}) = 8e^{2x}$. Siis $f'(0) = 8e^0 = 8$.

3. Pisteet A, B ja C määräävät kolmion. Kärjestä A lähtevät paikkavektorit ovat $\overline{AB} = (4-2)\overline{i} + (0-1)\overline{j} = 2\overline{i} - \overline{j}$ ja $\overline{AC} = (5-2)\overline{i} + (7-1)\overline{j} = 3\overline{i} + 6\overline{j}$.
Koska $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 0$, ovat vektorit kohtisuorat. Siis A:ssa oleva kolmion kulma on suora eli kolmio on suorakulmainen.

4. Vektorin $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ kohtisuora projektio xy-tasolle on vektori $x\overline{i} + y\overline{j}$. Näin ollen $x\overline{i} + y\overline{j} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$, josta saadaan, että $x = 2$ ja $y = 3$. Siis $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + z\overline{k}$ ja $|\overline{a}|^2 = 4 + 9 + z^2 = 22$, josta saadaan, että $z^2 = 9$ eli $z = \pm 3$. Kysytyt vektorit ovat $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} \pm 3\overline{k}$.
Vastaus: $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 3\overline{k}$ tai $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 3\overline{k}$.

5. Funktio $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ on määritelty, kun $x > 0$. Sen derivaatta $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ häviää, kun $\ln x = 1$ eli kun $x = e$. Koska $f'(x) > 0$, kun $0 < x < e$ ja $f'(x) < 0$, kun $x > e$, saavuttaa funktio suurimman arvonsa pisteessä $x = e$ ja $f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$.
Vastaus: $1/e$.

6. **a)** Koska $P(\text{ainakin 1 maali}) = 1 - P(\text{ei maaliakaan})$ ja
$P(\text{ei maaliakaan}) = (1 - 0{,}65)(1 - 0{,}75)(1 - 0{,}54) = 0{,}04025$, on
$P(\text{ainakin 1 maali}) = 1 - 0{,}04025 = 0{,}95975 \approx 0{,}96$.

b) Olkoon $P(n)$ todennäköisyys sille, että tulee n maalia. Tällöin odotusarvo on $E = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3)$. Nyt
$P(1) = 0{,}65(1 - 0{,}75)(1 - 0{,}54) + 0{,}75(1 - 0{,}65)(1 - 0{,}54) + 0{,}54(1 - 0{,}65)(1 - 0{,}75) = 0{,}24275$,

$P(2) = 0{,}65 \cdot 0{,}75(1 - 0{,}54) + 0{,}65 \cdot 0{,}54(1 - 0{,}75) + 0{,}75 \cdot 0{,}54(1 - 0{,}65) = 0{,}45375$,
$P(3) = 0{,}65 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}54 = 0{,}26325$.

Näin ollen $E = 0 + 1 \cdot 0{,}24275 + 2 \cdot 0{,}45375 + 3 \cdot 0{,}26325 = 1{,}94$.

Vastaus: **a)** 0,96, **b)** 1,94.

7. **a)** Ehdosta $y(0) = \frac{1}{t}$ saadaan $c = \frac{1}{t}$. Derivaatta $y'(x) = 2ax + b$. Sivuamisehto on $y'(t) = 0$ ja $y(t) = 0$. Edellinen antaa $2at + b = 0 \iff b = -2at$. Jälkimmäisestä saadaan nyt $y(t) = at^2 - 2at \cdot t + \frac{1}{t} = 0$ eli $-at^2 + \frac{1}{t} = 0 \iff a = \frac{1}{t^3}$. Tällöin $b = -\frac{2}{t^2}$. Polynomi on siis $y(x) = \frac{1}{t^3}x^2 - \frac{2}{t^2}x + \frac{1}{t}$.

b) Koska $t > 0$, on kysytty pinta-ala $\int_0^t (\frac{1}{t^3}x^2 - \frac{2}{t^2}x + \frac{1}{t})dx = \Big/_{0}^{t} \frac{1}{3t^3}x^3 - \frac{1}{t^2}x^2 + \frac{1}{t}x = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3}$. Pinta-ala on siis sama kaikilla arvoilla t, mikä todistaa väitteen.

Vastaus: **a)** $a = \frac{1}{t^3}$, $b = -\frac{2}{t^2}$, $c = \frac{1}{t}$.

8. **a)** Peruuntumisehto on $f(t) > \frac{1}{2} \cdot 5000 \iff \dfrac{5000}{1 + 4999e^{-0{,}8t}} > \dfrac{1}{2} \cdot 5000 \iff$ $1 + 4999e^{-0{,}8t} < 2 \iff e^{-0{,}8t} < \dfrac{1}{4999}$. Ottamalla puolittain logaritmit saadaan ehto muotoon $t > \dfrac{\ln 4999}{0{,}8} \approx 10{,}6462$. Peruutus tapahtuu siis 11 vuorokauden kuluttua.

b) Koska $f'(t) = \dfrac{5000 \cdot 0{,}8 \cdot 4999e^{-0{,}8t}}{(1 + 4999e^{-0{,}8t})^2} > 0$ kaikilla $t > 0$, on $f(t)$ aidosti kasvava funktio, kun $t > 0$.

c) $\lim_{t\to\infty} \dfrac{5000}{1 + 4999e^{-0{,}8t}} = \dfrac{5000}{1 + 4999 \lim_{t\to\infty} e^{-0{,}8t}} = \dfrac{5000}{1 + 0} = 5000.$

Vastaus: **a)** 11 vuorokautta, **c)** 5000.

9. Leikataan kartiota sen akselin kautta kulkevalla tasolla. Olkoon leikkauskuviossa A pohjan keskipiste, AB pohjan säde, C kartion huippu, D katkaistun kartion yläympyrän keskipiste ja DE yläympyrän säde. Suorakulmaisesta kolmiosta ABC saadaan, että reunaviiva $CB = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$. Yhdenmuotoisuuden perusteella $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{1}{2}$, josta saadaan $CE = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}\sqrt{29}$. Tämä on rengasalueen sisäympyrän säde. Ulkoympyrän säde on $CB = \sqrt{29}$. Rengasalueen pinta-ala on siten $\pi(\sqrt{29})^2 - \pi(\frac{1}{2}\sqrt{29})^2 = \frac{3}{4} \cdot 29\pi \approx 68{,}3296$ (cm^2).

Vastaus: 68 cm^2.

10. **a)** $3\tan\dfrac{x}{2} + 3 = 0 \iff \tan\dfrac{x}{2} = -1 \iff \dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{4} + n\pi \iff x = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z.$

b) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0 \iff 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x - 3 = 0 \iff 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$. Tämän ratkaisu on $\cos x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 2 \cdot 4}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4}$ eli $\cos x = \frac{1}{2}$ tai $\cos x = 1$. Edellisestä saadaan $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in Z$ ja jälkimmäisestä $x = 2n\pi,\ n \in Z$.

Vastaus: **a)** $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$, **b)** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ tai $x = 2n\pi,\ n \in Z$.

11. Kolmion K_1 korkeusjanan pituus on $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Piirtämällä ympyrälle Y_1 säde r_1 kohtisuoraan K_1:n kylkeä vastaan saadaan sen yläpuolelle kolmio, jonka toinen kateetti on r_1 ja korkeusjanalla oleva hypotenuusa $2r_1$. Näin ollen korkeusjanan pituus on $3r_1$, joten $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3r_1$, josta saadaan $r_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Piirretään sitten Y_1:n keskipisteestä säde kolmion K_2 huippuun ja jana kohtisuoraan K_2:n kylkeä vastaan. Saadaan kolmio, jonka hypotenuusa on r_1 ja lyhyempi kateetti $\frac{1}{2}r_1$. Pitempi kateetti on $\frac{\sqrt{3}}{2}r_1$. Tästä saadaan, että kolmion K_2 sivun pituus $a_2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}r_1 = r_1\sqrt{3}$.

Menettelemällä kuten edellä nähdään, että kolmion K_2 sisään asetetun ympyrän Y_2 säde $r_2 = \frac{a_2}{2\sqrt{3}} = \frac{r_1\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}r_1$ ja että ympyrän Y_2 sisään asetetun kolmion K_3 sivun pituus $a_3 = r_2\sqrt{3}$.

Aivan vastaavasti nähdään, että kolmion K_3 sisään asetetun ympyrän Y_3 säde on $r_3 = \frac{a_3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}r_2 = (\frac{1}{2})^2 r_1$.

Jatkamalla nähdään, että kolmioihin asetettujen ympyröiden säteet muodostavat geometrisen jonon r_1, $\frac{1}{2}r_1$, $(\frac{1}{2})^2 r_1$, $(\frac{1}{2})^3 r_1$, ... Tämän perusteella ympyröiden pinta-alojen summa on suppeneva geometrinen summa

$\sum_{n=1}^{\infty} \pi r_n^2 = \pi r_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^{n-1} = \pi r_1^2 \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \pi \dfrac{a^2}{4 \cdot 3} \cdot \dfrac{4}{3} = \pi \dfrac{a^2}{9}.$

Vastaus: $\pi \frac{a^2}{9}$.

12. **a)** Viivakoodille pätee $3(1+2+8+5+0+2)+4+6+2+9+3+d_{12} = 0 \pmod{10} \iff 78 + d_{12} = 0 \pmod{10} \iff d_{12} = 2 \pmod{10} \implies d_{12} = 2$.

b) Nyt $3(1+3+5+7+9+2)+2+4+6+8+1+3 = 3 \cdot 27 + 24 = 105 \neq 0 \pmod{10}$, joten viivakoodi on virheellinen.

c) Edellisen mukaan merkille d_3 pätee $3(24 + d_3) + 24 = 0 \,(\mathrm{mod}\ 10) \iff$

$96 + 3d_3 = 0 \pmod{10} \iff 3(32 + d_3) = 0 \pmod{10} \implies d_3 = 8$.

Vastaus: **a)** $d_{12} = 2$, **c)** $(1, 2, 8, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3)$.

13. Leikkauspisteiden x-koordinaatit saadaan jatkuvan funktion $h(x) = f(x) - g(x) = 1 - x - 3\cos x$ nollakohtina. Koska $h(-0{,}885) < -0{,}014 < 0$ ja $h(-0{,}89) > 0{,}0017 > 0$, on funktiolla $h(x)$ nollakohta x_1 välillä $]-0{,}885; -0{,}89[$. Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on $x_1 = -0{,}89$.

Koska $h(1{,}86) < -0{,}0044 < 0$ ja $h(1{,}865) > 0{,}0049 > 0$, on $h(x)$:llä toinen nollakohta x_2 välillä $]1{,}86; 1{,}865[$. Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on $x_2 = 1{,}86$.

Koska $h(3{,}635) > 0{,}0071 > 0$ ja $h(3{,}64) < -0{,}0049 < 0$, on $h(x)$:llä kolmas nollakohta x_3 välillä $]3{,}635; 3{,}64[$. Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on $x_3 = 3{,}64$.

Leikkauspisteiden y-koordinaatit ovat $y_1 = f(x_1) = 1 - x_1 \approx 1{,}89$, $y_2 = 1 - x_2 \approx -0{,}86$ ja $y_3 = 1 - x_3 \approx -2{,}64$.

Vastaus: $(-0{,}89; 1{,}89)$, $(1{,}86; -0{,}86)$ ja $(3{,}64; -2{,}64)$.

***14.** **a)** Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}) = \frac{1}{4}(2+2) = 1.$

b) $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})) = \dfrac{1}{2}(e^x - (-1)e^{-x}) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x.$

c) $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen $\sinh x$ on aidosti kasvava, josta seuraa, että sillä on käänteisfunktio.

Määritetään käänteisfunktion lauseke. $y = \sinh x \iff 2y = e^x - e^{-x} \iff 2ye^x = (e^x)^2 - e^x e^{-x} \iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$

Tästä ratkeaa $e^x = \dfrac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Miinusmerkki ei kelpaa, koska $e^x > 0$ aina, joten $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$. Ottamalla logaritmi saadaan käänteisfunktion lausekkeeksi $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

d) Koska aina $|y| < \sqrt{y^2+1}$, on $y + \sqrt{y^2+1} > 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Näin ollen käänteisfunktio $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ on määritelty kaikilla $y \in \mathbb{R}$ eli sen määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.

***15.** **a)** Piirretään x-akselin suuntainen suora r_1-säteisen ympyrän keskipisteestä kuvioon piirretylle säteelle r_2. Tällöin syntyy suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on $r_1 + r_2$ ja kateetit $r_2 - r_1$ sekä d. Tällöin $d^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2 \iff d^2 = 2r_1r_2 + 2r_1r_2 \implies d = 2\sqrt{r_1r_2}$.

b) Piirretään pienen ympyrän keskipisteestä O_3 x-akselin suuntainen suora kuvioon piirretylle säteelle r_1 sekä yhdistetään O_3 r_1-säteisen ympyrän keskipisteeseen. Tällöin saadaan suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on $r_1 + r_3$ ja pystysuora kateetti $r_1 - r_3$. Toisen kateetin pituudelle d_1 saadaan yhtälö $d_1^2 = (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 \iff d_1 = 2\sqrt{r_1r_3}$.

Vastaavasti saadaan toiselle puolelle suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on $r_2 + r_3$ ja pystysuora kateetti $r_2 - r_3$. Toisen kateetin pituudelle d_2 saadaan yhtälö $d_2^2 = (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2 \iff d_2 = 2\sqrt{r_2r_3}$.

Edellisen kohdan mukaan $2\sqrt{r_1r_2} = d = d_1 + d_2 = 2(\sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_2r_3})$, josta saadaan $\sqrt{r_3}(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}) = \sqrt{r_1r_2} \implies r_3 = (\dfrac{\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}})^2 = \dfrac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}$.

c) $(k_1 + k_2 + k_3)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \iff k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 2k_1k_2 + 2k_1k_3 + 2k_2k_3$.

Sijoitetaan jälkimmäiseen yhtälöön $k_1 = \dfrac{1}{r_1}$, $k_2 = \dfrac{1}{r_2}$ ja $k_3 = \dfrac{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}{r_1r_2}$ sekä sievennetään. Tällöin saadaan

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{2}{r_1^2} + \frac{2}{r_2^2} + \frac{6}{r_1r_2} + \frac{4}{r_1\sqrt{r_1r_2}} + \frac{4}{r_2\sqrt{r_1r_2}},$$

$$2k_1k_2 + 2k_1k_3 + 2k_2k_3 = \frac{2}{r_1^2} + \frac{2}{r_2^2} + \frac{6}{r_1r_2} + \frac{4}{r_1\sqrt{r_1r_2}} + \frac{4}{r_2\sqrt{r_1r_2}}.$$

Koska lausekkeet ovat yhtäsuuret, on kaava oikea.