Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 9 ratkaisuja (AP)
4.4.2012

1. Olkoon $1 < p < \infty$ ja operaattori $T : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ annettu kaavalla

$$(Tf)(x) = xf(x), \quad x \in (0,1).$$

Onko $T : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ jatkuva ? Entä onko se injektio ? Onko T kääntyvä ?!

RATKAISU 1: Olkoon $f \in L^p(0,1)$ ja lasketaan

$$\|Tf\|_p^p = \int_0^1 |xf(x)|^p dx \leq \int_0^1 |f(x)|^p dx.$$

Nähdään että T on jatkuva.

Olkoon $f \in L^p(0,1)$ sellainen että $Tf = 0$, toisin sanoen $xf(x) = 0$ melkein kaikilla x. Tämä voi päteä vain jos $f(x) = 0$ melkein kaikilla $x \in [0,1]$. Siten f on injektio.

Tarkastellaan funktiota $g(x) = x^{-1/2p}$, joka tunnetusti kuuluu avaruuteen $L^p(0,1)$. Jos $f \in L^p(0,1)$ olisi sellainen funktio että $Tf = g$, niin pätisi $xf(x) = x^{-1/2p}$ melkein kaikkialla. Toisin sanoen $f(x) = x^{-1/2p}x^{-1}$ melkein kaikkialla. Mutta tällainen f ei voi kuulua avaruuteen $L^p(0,1)$, mikä johtaa ristiriitaan. Siis T ei ole surjektio, eikä näin ollen kääntyvä.

2. Olkoon $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ sellainen annettu reaalilukujen jono, että

$$\text{sarja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee kaikilla jonoilla } (x_k) \in c_0.$$

Näytä, että silloin $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^1$.

[*Vihje*: Argumentoi kuten luennoilla tai muistiinpanojen Esimerkissä 7.7., käyttäen Banach-Steinhausin lausetta.]

RATKAISU 2: Toimitaan kuten vihjeessä. Asetetaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k,$$

kun $x = (x_k) \in c_0$. Tällöin nähdään helposti että

$$|f_n(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right) \|x\|_\infty.$$

Siis $f_n : c_0 \to \mathbb{R}$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tehtävän oletusten nojalla raja-arvo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

on olemassa kaikilla $x = (x_k) \in c_0$. Koska c_0 on Banach, niin lauseen 7.4 perusteella myös f on jatkuva, joten

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\|_\infty$$

kaikilla $x \in c_0$.

Valitaan nyt luvut x_k seuraavasti: $x_k = a_k/|a_k|$, kun $a_k \neq 0$ ja $x_k = 0$ kun $a_k = 0$ ja tarkastellaan vektoreita $x^n = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0...) \in c_0$. Nyt

$$|f(x^n)| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \|f\| \|x^n\| = \|f\|$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Mutta tämä antaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \|f\| < \infty,$$

joten $(a_k) \in \ell^1$.

Mieti, miksi todistus ei toimi jos c_0 korvataan äärellisten jonojen avaruudella c_{00}.

3. Olkoot E, F ja G Banach avaruuksia. Kuvaus $A : E \times F \to G$ on *bilineaarinen*, jos kuvaukset $A_1(y) : x \mapsto A(x, y)$ ja $A_2(x) : y \mapsto A(x, y)$ ovat lineaarisia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$.

Osoita, että bilineaarinen kuvaus A on *rajoitettu*, eli

$$\sup\{\|A(x, y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} < \infty,$$

jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_2(x) : F \to G$ ja $A_1(y) : E \to G$ ovat jatkuvia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$.

[*Taikasana:* Banach-Steinhausin lause, eli tasaisen rajoituksen periaate].

RATKAISU 3: Merkitään

$$\|A\| = \sup\{\|A(x,y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$$

Oletetaan ensin että $\|A\| < \infty$. Olkoot $w \in E$ ja $z \in F$ ja olkoot w_0 ja z_0 näihin liittyvät yksikkövektorit, jolloin $w = \|w\|w_0$ ja $z = \|z\|z_0$.

Koska A on bilineaarinen, niin

$$\begin{aligned} \|A_1(z)\| &= \sup_{\|x\|=1} \|A_1(z)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x,z)\| \\ &= \|z\| \sup_{\|x\|=1} \|A(x,z_0)\| \leq \|A\|\|z\|, \end{aligned}$$

joten $A_1(z)$ on rajoitettu ja $\|A_1(z)\| \leq \|A\|\|z\|$. Vastaavalla päättelyllä saadaan $\|A_2(w)\| \leq \|A\|\|w\|$.

Oletetaan nyt että $A_1(z)$ ja $A_2(w)$ ovat rajoitettuja kaikilla $w \in E$ ja $z \in F$. Olkoon nyt B_F avaruuden F suljettu yksikkökuula ja tarkastellaan kaikilla $z \in B_F$ operaattoria $T_z : E \to G$, joka määritellään kaavalla $T_z(x) = A_1(z)x$. Jos $x \in E$, niin

$$\sup_{z\in B_F} \|T_z(x)\| = \sup_{z\in B_F} \|A(x,z)\| = \sup_{z\in B_F} \|A_2(x)z\| = \|A_2(x)\| < \infty.$$

Banach-Steinhausin lause antaa nyt $\sup_{z\in B_F} \|T_z\| = M < \infty$. Olkoot nyt $x \in E$ ja $y \in F$ sellaiset että $\|x\| \leq 1$ ja $\|y\| \leq 1$. Tällöin

$$\|A(x,y)\| = \|T_y(x)\| \leq \|T_y\| \leq M.$$

Siis A on rajoitettu ja $\|A\| \leq M$.

4. Olkoon F Banachin avaruus ja $G := \{T \in \mathcal{L}(F) \text{ kääntyvä (eli isomorfismi)}\}$. Asetetaan kuvaus $\mathcal{A} : G \to G$, $\mathcal{A}(T) = T^{-1}$. Osoita, että kun $\|H\|$ on riittävän pieni,

$$\mathcal{A}(T+H) = \mathcal{A}(T) - T^{-1}HT^{-1} + E(H)$$

missä jäännöstermi $E(H) \in \mathcal{L}(F)$ toteuttaa ehdon $\|E(H)\| \leq \textit{vakio} \cdot \|H\|^2$.
[Tulkinta: Laskusi osoittaa, että kuvaus $\mathcal{A}$ on *derivoituva* jokaisessa avoimen joukon G pisteessä.]

RATKAISU 4: Olkoon $T \in G$ ja valitaan H siten että $\|H\| \leq \|T^{-1}\|^{-1}$. Tällöin $\|T^{-1}H\| < 1$, joten $I + T^{-1}H \in G$, ja näin ollen myös $T(I + T^{-1}H) = T + H \in G$.

Nyt saadaan $(T+H)^{-1} = (I + T^{-1}H)^{-1}T^{-1}$, joka antaa Neumannin sarjoja soveltamalla

$$\begin{aligned}(T+H)^{-1} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-T^{-1}H)^k\right)T^{-1} \\ &= T^{-1} - T^{-1}HT^{-1} + \left(\sum_{k=2}^{\infty}(-T^{-1}H)^k\right)T^{-1}.\end{aligned}$$

Asetetaan

$$E(H) = \left(\sum_{k=2}^{\infty}(-T^{-1}H)^k\right)T^{-1} = \left((T^{-1}H)^2\sum_{k=0}^{\infty}(-T^{-1}H)^k\right)T^{-1},$$

jolloin saadaan

$$\|E(H)\| \leq \|H\|^2 \frac{\|T^{-1}\|^3}{1 - \|T^{-1}H\|} \leq C\|H\|^2,$$

esimerkiksi aina kun $\|H\| \leq (1/2)\|T^{-1}\|^{-1}$.

5. (*Osgoodin tasaisen rajoituksen periaate*, 1897) Olkoon $(f_n) \subset C(0,1)$ jono jatkuvia funktioita $[0,1] \to \mathbb{R}$, jotka ovat *pisteittäin rajoitettuja*, eli $M(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |f_n(x)| < \infty$ kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita, että on olemassa avoin väli $(a,b) \subset [0,1]$ ja luku $M < \infty$, siten että $|f_n(x)| \leq M$ kaikilla $x \in (a,b)$ ja $n \in \mathbb{N}$.
[*Vihje.* Imitoi Banach-Steinhausin lauseen todistusta.]

RATKAISU 5: Imitoidaan Banach-Steinhausin lauseen todistusta. Määritellään

$$F(m,n) := \{x \in [0,1] : \|f_n(x)\| \leq m\},$$

Jolloin jokainen $F(m,n)$ on, suljetun joukon alkukuvana jatkuvassa kuvausessa, suljettu. Leikkausjoukko

$$F_m = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F(m,n)$$

on niin ikään suljettu.

Jos nyt $x \in [0,1]$, niin oletusten mukaan $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$, joten on olemassa $m_x \in \mathbb{N}$, jolle $x \in F_{m_x}$. Siis

$$[0,1] = \bigcup_{m\in N} F_m.$$

Kuten Banach-Steinhausin lauseen todistuksessa, käytetään seurausta 7.2 ja nähdään että on olemassa $M \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [0,1]$ ja $r_0 > 0$, joille

$$B(x_0, r_0) \subset F_M.$$

Mutta selvästi $B(x_0, r_0)$ sisältää jonkin avoimen välin (a,b) ja väite on nyt todistettu.