Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 8 ratkaisuja (AP)
28.3.2012

1. Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ trigonometrinen polynomi. Laske konvoluution

$$(f * P)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)P(x-t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)P(t)dt$$

Fourier kertoimet $\widehat{(f * P)}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, funktioiden P ja f Fourier kertoimien avulla.

RATKAISU 1: Kirjoitetaan

$$P(x-t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik(x-t)} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} e^{-itx}.$$

Lasketaan nyt kun $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\widehat{(f * P)}(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f * P)(x) e^{-imx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} e^{-ikt} dt \right) e^{-imx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{-imx} dx \\
&= \sum_{k=-n}^{n} a_k \widehat{f}(k) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx-imx} dx \\
&= a_m \widehat{f}(m) = \widehat{P}(m) \widehat{f}(m),
\end{aligned}$$

missä tulkitaan tietysti että $a_m = 0$, kun $|m| > n$.

2. Anna esimerkki jatkuvista lineaarisista kuvauksista $S, T \in \mathcal{L}(E)$ (sopivassa Banach avaruudessa E), joille pätee $\|ST\| < \|S\|\|T\|$. Voitko valita $S = T$?

RATKAISU 2: Tartutaan heti jatkokysymykseen, sillä positiivinen esimerkki siihen ratkaisee koko tehtävän. Tarkastellaan Banach-avaruutta $E = \mathbb{R}^2$ ja kuvausta $T : E \to E$, joka määritellään seuraavasti: $T(x, y) = (y, 0)$. Selvästi T on jatkuva, lineaarinen ja nollasta eroava, siis $\|T\| > 0$. Mutta helposti nähdään että $T^2 = 0$, joten $\|T^2\| = 0 < \|T\|^2$.

3. Osoita että

$$Tf = \big(\, f(1/k)\,\big)_{k\in\mathbb{N}} = \big(\, f(1), f(1/2), f(1/3), \dots \big)$$

on hyvin määritelty lineaarinen kuvaus $T : C(0, 1) \to \ell^\infty$. Näytä, että T on jatkuva ja määrää normi $\|T\|$. Onko T injektio ? Entä onko T surjektio ?

RATKAISU 3: On selvää että T on lineaarinen. Koska $f(1/k) \le \|f\|_\infty$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin on osoitettu että T on hyvin määritelty jatkuva lineaarikuvaus $C(0, 1) \to \ell^\infty$, jonka normi on enintään 1. Tarkastelemalla vakiofunktiota 1, nähdään helposti että $\|T1\|_\infty = 1 = \|1\|_\infty$, joten T:n normi on tasan 1.

Kuvaus T ei ole injektio: funktion $g(t) = (t - 1/2)(t - 1)$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat 1/2 ja 1. Jos määrittelemme funktion $f(t) = \min\{0, g(t)\}$, havaitsemme että $Tf = 0$, mistä nähdään ettei T ole injektio.

Kuvaus T ei ole surjektio: tehdään vastaoletus ja tarkastellaan alkiota $x = (-1, 1, -1, 1, ...) \in \ell^\infty$ ja oletetaan että $Tf = x$ jollain $f \in C(0, 1)$. Tällöin jono $(Tf(n)) = ((-1)^n)$ suppenisi kohti lukua $f(0)$, mikä johtaa ristiriitaan.

4. Olkoon $1 \le p \le \infty$. Esitä jokin isomorfismi $T : L^p(0, 1) \to E$ kun
a) $E = L^p(-2, 2)$, ja b) $E = L^p(0, \infty)$.

[Vihje: Jälkimmäisessä tapauksessa T voisi olla vaikka muotoa $Tf(x) = g(x)f\big(h(x)\big)$ sopivilla funktioilla g ja h.]

RATKAISU 4: (a) Tarkastellaan kuvausta $\varphi(x) = (x + 2)/4$, joka kuvaa välin $[-2, 2]$ välille $[0, 1]$. Huomaa, että $\widetilde{\varphi}(x) = 4x-2$ on φ:n käänteiskuvaus. Määritellään Operaattorit $Tf = f \circ \varphi$ ($L^p(0, 1) \to L^p(-2, 2)$) ja $\widetilde{T}f = f \circ \widetilde{\varphi}$ ($L^p(-2, 2) \to L^p(0, 1)$). Selvästi kuvaukset T ja $\widetilde{T}$ ovat toistensa käänteiskuvaukset. Osoitetaan ne nyt jatkuviksi.

Jos $p = \infty$, niin kuvausten φ ja $\widetilde{\varphi}$ bijektiivisyydestä seuraa helposti että $\|T\| = \|\widetilde{T}\| = 1$, joten erityisesti T on isomorfismi.

Jos $1 \le p < \infty$, niin lasketaan käyttämällä muuttujanvaihtoa

$$\|Tf\|_p = \left(\int_{-2}^{2} |(f \circ \varphi)(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 |(f(x)|^p 4dx \right)^{1/p} = 4^{1/p} \|f\|_p,$$

ja vastaavasti

$$\|\widetilde{T} g\|_p = 4^{-1/p} \|g\|_p,$$

missä $f \in L^p(0,1)$ ja $g \in L^p(-2,2)$. Siis kuvaukset T ja $\widetilde{T}$ ovat jatkuvia, joten T on isomorfismi.

(b) Otetaan käyttöön kuvaus $\psi(x) = 1 - (1+x)^{-1}$, joka kuvaa välin $(0,\infty)$ väliksi $(0,1)$. Sen käänteiskuvaus on $\widetilde{\psi}(x) = (x-1)^{-1} - 1$. Jos $p = \infty$, niin aivan kuin edellä saadaan operaattorit T ja $\widetilde{T}$, ja nähdään että T on isomorfismi.

Jos $1 \le p < \infty$ edetään seuraavasti. Lasketaan $\psi'(x) = (1+x)^{-2}$ ja $\widetilde{\psi}'(x) = (1-x)^{-2}$. Määritellään nyt $T_p f = (\widetilde{\psi}')^{1/p}(f \circ \psi)$ ja $\widetilde{T}_p f = (\psi')^{1/p}(f \circ \widetilde{\psi})$.

Huomaa että jos $f \in L^p(0,1)$, niin

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_p T_p f(x) &= \psi'(x)^{1/p}((T_p f) \circ \widetilde{\psi})(x) \\ &= \psi'(x)^{1/p}(\widetilde{\psi}'(\psi(x))^{1/p}(f \circ \psi \circ \widetilde{\psi})(x) = f(x),\end{aligned}$$

missä viimeisessä yhtälössä käytettiin havaintoa

$$\psi'(x)^{1/p}(\widetilde{\psi}'(\psi(x))^{1/p}) = (\psi \circ \widetilde{\psi})'(x)^{1/p} = 1.$$

Samoin nähdään että $\widetilde{T}_p T_p g(x) = g(x)$, kun $g \in L^p(0,\infty)$. Siis T_p ja $\widetilde{T}_p$ ovat toistensa käänteiskuvaukset. Osoitetaan ne vielä rajoitetuiksi. Olkoon $f \in L^p(0,1)$ ja lasketaan muuttujanvaihdolla

$$\|T_p f\|_p^p = \int_0^\infty |f \circ \psi(x)|^p \widetilde{\psi}'(x) dx = \int_0^1 |f(x)|^p dx$$

Siten $\|T_p\| = 1$ ja vastaavasti nähdään että myös $\|\widetilde{T}_p\| = 1$, joten T_p on isomorfismi. Se on itseasiassa myös isometria, sillä se säilyttää normin.

Mieti, miten (a)-kohdassa saisi aikaan isometrian.

5. Jos $f \in L^2(0,2\pi)$, osoita että

$$T : g \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) dt \ =: (Tg)(x)$$

määrittelee jatkuvan lineaarisen operaattorin $T : L^2(0, 2\pi) \to L^2(0, 2\pi)$, jonka normi $\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$.

[Vihje: Olkoon $M = \{P \in L^2(0, 2\pi) : P \text{ on trigonometrinen polynomi}\}$. Osoita ensin Tehtävän 1 ja Parsevalin avulla, että T määrää jatkuvan lineaarisen operaattorin $L^2(0, 2\pi)$:n aliavaruudessa M, ja laske normi $\|T_{|_M}\|$. Käytä sitten monisteen jatkolausetta 6.16. Onko M tiheässä $L^2(0, 2\pi)$:ssa ?]

RATKAISU 5: Tehdään ensin suora arvio, jos $g \in L^2(0, 2\pi)$, niin

$$\begin{aligned}\|Tg\|_2^2 &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{\|f\|_2^2 \|g\|_2^2 dx}{2\pi} \leq \|f\|_2^2 \|g\|_2^2.\end{aligned}$$

Näin nähdään että $T : L^2(0, 2\pi) \to L^2(0, 2\pi)$ on rajoitettu ja että pätee arvio $\|T\| \leq \|f\|_2 = \|(\widehat{f}(n))\|_2$. Huomaa kuitenkin, että $\|(\widehat{f}(n))\|_2 \geq \|(\widehat{f}(n))\|_\infty$, joten tehtävässä metsästetään parempaa arviota.

Luennoilla on osoitettu että M (joka on äärellisten Fourier-sarjojen avaruus) on tiheässä avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$. Tehtävän 1 mukaan, jos $g \in M$, niin $\widehat{Tg}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$. Parsevalin yhtälön mukaan, silloin

$$\|Tg\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)|^2 \leq \|(\widehat{f}(n))\|_\infty^2 \|g\|_2^2.$$

Siten tiheässä aliavaruudessa pätee arvio $\|T_{|_M}\| \leq \|(\widehat{f}(n))\|_\infty$. Jos otamme tarkasteluun trigonometriset monomit $e_n(t) = e^{int}$, näemme (tehtävän 1 avulla) että

$$|\widehat{e_n}(n)| = \|(\widehat{e_n}(k))\|_2 = \|(\widehat{Te_n}(k))\|_2 = |\widehat{f}(n)\widehat{e_n}(n)|,$$

mikä antaa $\|T_{|_M}\| = \|(\widehat{f}(n))\|_\infty$.

Luentojen lauseen 6.16 mukaan $T_{|_M}$ on laajennettavissa kuvaukseksi $\widetilde{T} : L^2(0, 2\pi) \to L^2(0, 2\pi)$.

Nyt, laajennuksen yksikäsitteisyyden nojalla $\widetilde{T} = T$, joten niinikään lauseen 6.16 nojalla saadaan, $\|T\| = \|\widetilde{T}\| = \|(\widehat{f}(n))\|_\infty$.