Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 7 ratkaisuja (AP)
21.3.2012

Huom: Alla samaistamme luonnollisella tavalla funktiot $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja 2π-periodiset funktiot $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

1. a) Jos $f(x)$ jatkuvasti derivoituva 2π-periodinen funktio, osoita että silloin $\widehat{(f')}(n) = in\widehat{f}(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

b) Osoita, että kaikille 2π-periodisille funktioille $f \in C^k(\mathbb{R})$ pätee $|\widehat{f}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-k}$, $n \in \mathbb{Z}$. Vertaa tulosta HT6/Tehtävän 1 funktion g Fourier-kertoimiin: Päteekö arvio kaikille $f \in C^k(0, 2\pi)$?

[Vihje: Jos periodinen funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva, sen derivaatatkin ovat periodisia (miksi?)]

RATKAISU 1: (a) Koska $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva, niin f' on toki rajoitettu välillä $[0, 2\pi]$ ja osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\widehat{f'}(n) &= \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}dx \\
&= [f(x)e^{-inx}]_0^{2\pi} + (in)\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \sqrt{2\pi}in\widehat{f}(n).
\end{aligned}$$

Sijoitustermi häviää koska $f(0)e^{-in0} = f(2\pi)e^{-in2\pi}$.

(b) Osoitetaan ensin että jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva ja 2π-periodinen, niin f' on myös 2π-periodinen. Tästä seuraa helpolla päättelyllä että k kertaa jatkuvasti derivoituvan 2π-periodisen funktion jokainen derivaatta kertalukuun k asti on 2π-periodinen.

Suoralla laskulla kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + 2\pi + h) - f(x)}{h} = f'(x + 2\pi),$$

missä käytettiin hyväksi f:n periodisuutta.

Käyttämällä kohdan (a) tulosta k kertaa, saadaan

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k\widehat{f}(n).$$

Koska $f^{(k)}$ on jatkuva, se on avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$, joten sen Fourier-kertoimet ovat avaruudessa ℓ^2, erityisesti siis avaruudessa ℓ^∞. Siis on olemassa $C' > 0$, jolle pätee

$$|n|^k |\widehat{f}(n)| \leq C'.$$

Huomaa, että jos $n \neq 0$, niin $(1+|n|)^k \leq 2^k |n|^k$. Asettamalla $C = \max\{|\widehat{f}(0)|, C'2^k\}$ saadaan

$$(1 + |n|)^k |\widehat{f}(n)| \leq C,$$

mistä päädytään haluttuun arvioon.

Huomaa, ettei kohdan tulos päde ilman periodisuutta, sillä osittaisintegroinnin sijoitustermi ei tällöin katoa. Harjoitusten 6 tehtävän 1 funktio on mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituva, mutta Fourier-kertoimet menevät nollaan (vain) samaa vauhtia kuin $(1 + |n|)^{-1}$.

2. Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ sellainen funktio, että Fourier sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$ suppenee itseisesti.

a) Osoita, että Fourier osasummat suppenevat tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota $g \in C(0, 2\pi)$, eli $s_n(f; x) \to g(x)$ tasaisesti välillä $[0, 2\pi]$, kun $n \to \infty$.

b) Osoita, että $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in [0, 2\pi]$.

RATKAISU 2: (a) Olkoon $\epsilon > 0$. Koska sarja suppenee itseisesti, on olemassa indeksi N siten että

$$\sum_{|n|>N} |\widehat{f}(n)| < \epsilon.$$

Jos nyt $k, n > N$, niin

$$|s_k(f; x) - s_k(f; x)| \leq \sum_{|n|>N} |\widehat{f}(n)|,$$

mistä nähdään että osasummat suppenevat tasaisesti. Koska ne ovat lisäksi jatkuvia, pätee $s_n(f; x) \to g(x)$ tasaisesti, jollekin jatkuvalle g.

(b) Koska osasummat s_n suppenevat tasaisesti kohti g:tä, niin pätee myös

$$\|s_n - g\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|s_n - g\|_\infty \to 0,$$

joten $s_n \to g$ myös L^2-normissa.

Huomaa, että g on myös avaruuden $L^2(0, 2\pi)$ alkio, joten osasummat suppenevat L^2-normissa kohti g:tä. Mutta nyt $f = g$ melkein kaikkialla, raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla.

3. Olkoon $f(x)$ jatkuvasti derivoituva 2π-periodinen funktio. Osoita, että f:n Fourier sarja suppenee itseisesti.
[Vihje: Hyödynnä Tehtävää 1, ja arvioi sarjaa $\sum |\widehat{f}(n)|$ Cauchy-Schwarzin avulla]

RATKAISU 3: Koska f' on avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$, tiedämme tehtävän 1 perusteella, että jono $n\widehat{f}(n)$ kuuluu avaruuteen ℓ^2. Mutta tällöinhän saadaan Cauchy-Schwarzia käyttämällä

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| &\leq |\widehat{f}(0)| + \sum_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |n|^{-1}|n||\widehat{f}(n)| \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + (2\sum_{1}^{\infty} |n|^{-2})^{1/2} \|(n\widehat{f}(n))\|_2 < \infty.\end{aligned}$$

Siis sarja suppenee itseisesti.

4. Todista, että $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
[Vihje: Sovella Plancherellin kaavaa funktioon $g(x) = x$; vrt. HT 6/Teht.1]

RATKAISU 4: Palataan harjoitusten 6 tehtävään 1, jossa laskimme funktion $g(x) = x$ Fourier-kertoimet. Saimme $|\widehat{g}(0)| = \sqrt{2\pi}\pi$ ja $|\widehat{g}(n)| = \sqrt{2\pi}/|n|$, kun $n \neq 0$. Toisaalta voimme laskea että $\|g\|_2^2 = (8/3)\pi^3$. Nyt käytämme Parsevalin kaavaa, jonka mukaan Fourier-kertoimien ℓ^2-summa on sama kuin g:n L^2-normi. Siis

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(n)|^2 = 2\pi^3 + 4\pi \sum_{1}^{\infty} |n|^{-2} = (8/3)\pi^3.$$

Sieventämällä viimeinen yhtälö, saadaan haluttu tulos.

5. (Käänteinen Tehtävälle 1). Oletamme, että $f \in L^2[0, 2\pi]$. Jos kaikilla $k \in \mathbb{N}$ löytyy vakio $C = C_k$ jolle

$$|\widehat{f}(n)| \leq C_k(1 + |n|)^{-k}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

osoita, että silloin on olemassa funktio $g \in C^\infty[0, 2\pi]$, jolle $f(x) = g(x)$ melkein kaikkialla.

[Vihje: Osoita että f:n Fourier sarjaa voi derivoida.]

RATKAISU 5: Osoitetaan, että jos

$$|\widehat{f}(n)| \leq C_{k+2}(1+|n|)^{-k-2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

niin f:n ekvivalenssiluokassa on edustaja, joka kuuluu avaruuteen $C^k[0, 2\pi]$.

Merkitään $F_N(x) = \sum_{-N}^{N} |\widehat{f}(n)| e^{inx}$. Jos nyt $m \leq k$, niin

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^m |\widehat{f}(n)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{C_{k+2}|n|^m}{(1+|n|)^{k+2}} < \infty,$$

mistä nähdään että sarjat

$$F_N^{(m)}(x) = \sum_{-N}^{N} (in)^m \widehat{f}(n) e^{inx}$$

suppenevat itseisesti. Havaitaan, että kertalukuun k asti, osasummien F_N derivaatat suppenevat tasaisesti, mistä nähdään että pisteittäinen rajafunktio

$$F(x) = \lim_{N \to \infty} F_N(x)$$

on avaruudessa $C^k[0, 2\pi]$.

Oletuksen nojalla nähdään nyt että F on avaruudessa $C^k[0, 2\pi]$ kaikilla k, joten $F \in C^\infty[0, 2\pi]$. Tehtävän 2(b) kaltaisella päättelyllä nähdään, että $f = F$ melkein kaikkialla.