Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 6 ratkaisuja (AP)
29.2.2012

1. Jono $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\cos(nt) + i\sin(nt))$, $n \in \mathbb{Z}$ on ortonormaali avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$. Laske funktion $g(t) = t$ Fourier kertoimet $(g|e_n)$.

RATKAISU 1: Otetaan käyttöön merkintä $g_n = (g|e_n)$. Lasketaan

$$g_0 = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} t dt = \sqrt{2}\pi^{3/2}.$$

Jos $n \neq 0$, niin on helppo nähdä että

$$\frac{d}{dt}((in)^{-1}te^{int} - (in)^{-2}e^{int}) = te^{int},$$

joten

$$g_{-n} = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} te^{int}dt = (2\pi)^{-1/2}[((in)^{-1}2\pi - (in)^{-2}) - (0 - (in)^{-2})] = \frac{(2\pi)^{1/2}}{in}.$$

Siten on saatu $g_0 = \sqrt{2}\pi^{3/2}$ ja $g_n = -\frac{(2\pi)^{1/2}}{in}$, kun $n \neq 0$.

2. Olkoon $E = L^2(-2, 2)$ ja $M = \{f \in E : f(x) = f(-x) \text{ m.k. } x \in [-1, 1]\}$ parillisten funktioiden muodostama vektorialiavaruus. Osoita, että M on suljettu E:ssä, ja määrää projektio $P_M(h)$ sekä etäisyys $d(h, M)$, kun $h(x) = e^x$, $x \in [-1, 1]$.

RATKAISU 2: Otetaan käyttöön kuvaus $T : E \to E$, $Tf(x) = f(-x)$. Tällöin on helppo nähdä että T on jatkuva, joten niin on myös $S = (I - T)$, missä I on identtinen kuvaus. Nyt $M = S^{-1}(\{0\})$, mistä nähdään että M on suljettu. Selvästi M on E:n vektorialiavaruus.

Määrätään nyt ortoprojektio $P = P_M : E \to M$ kaavalla $Pf(x) = (f(x)+$

$f(-x))/2$. Selvästi $P(E) = M$, $P^2 = P$ ja jos $g \in M$, niin

$$\begin{aligned}
(f - Pf|g) &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx - \int_{-1}^{1} (f(x) + f(-x))g(x)/2dx \\
&= \int_{-1}^{1} (f(x) - f(-x))g(x)/2dx \\
&= (1/2)\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx - (1/2)\int_{-1}^{1} f(-x)g(x)dx \\
&= (1/2)\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx - (1/2)\int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx = 0,
\end{aligned}$$

koska $g(x) = g(-x)$.

Nyt jos $h \in E$ niin $P(h) = (1/2)(e^x + e^{-x}) = \cosh x$ ja kaavan (4.22) mukaan $d(h, M) = \|h - Ph\|_2$. Siten voimme laskea tehtävän funktiolle

$$\begin{aligned}
d(h, M)^2 &= (1/4)\int_{-1}^{1} |h(x) - h(-x)|^2 dx \\
&= (1/4)\int_{-1}^{1} (e^{2x} - 2 + e^{-2x})dx \\
&= (1/8)[e^{2x} - 4x - e^{-2x}]_{-1}^{1} \\
&= (1/8)(e^2 - 4 - e^{-2} - e^{-2} - 4 + e^2) \\
&= (1/4)(e^2 - e^{-2} - 4) = (1/2)\sinh 2 - 1.
\end{aligned}$$

Näin ollen $d(h, M) = \sqrt{\dfrac{\sinh 2}{2} - 1}$.

3. Olkoon E Hilbertin avaruus ja M sen suljettu vektorialiavaruus. Osoita että jokaisella $x \in E$,

$$\min\{\|x - m\| : m \in M\} = \max\{|(x|y)| : y \in M^\perp, \|y\| = 1\}.$$

RATKAISU 3: Koska M on suljettu, niin on olemassa ortoprojektio $P : E \to M$. Jos $x \in E$, niin tällöin

$$x = Px + (I - P)x = x' + x'',$$

missä $x' \in M$ ja $x'' \in M^\perp$. Tunnetusti nyt

$$\min\{|x - m\| : m \in M\} = \|x''\|.$$

Jos $y \in M^\perp$ ja $\|y\| = 1$, niin

$$|(x|y)| = |(x' + x''|y)| \leq |(x'|y)| + |(x''|y)| = |(x''|y)| \leq \|x''\|\|y\| = \|x''\|.$$

Siten on osoitettu että

$$\min\{|x - m\| : m \in M\} = \|x''\| \geq \sup\{|(x|y)| : y \in M^\perp, \|y\| = 1\}.$$

Toisaalta, merkitään $\tilde{x} = x''/\|x''\|$, jolloin $\tilde{x} \in M^\perp$ ja $\|\tilde{x}\| = 1$. Nyt

$$(x''|\tilde{x}) = (x''|x'')/\|x''\| = \|x''\|.$$

Näin ollen

$$\sup\{|(x|y)| : y \in M^\perp, \|y\| = 1\} = \max\{|(x|y)| : y \in M^\perp, \|y\| = 1\} = \|x''\|,$$

ja väite on todistettu.

4. Tarkastellaan sisätulon $(f|g) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} e^{-x^2} dx$ määräämää painotettua L^2-avaruutta, eli Hilbertin avaruutta $E = L^2(w)$, $w(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$. Osoita, että jokainen polynomi $P(x) \in E$ ja että kaikille polynomeille P ja Q pätee

$$(P|A_+Q) = (A_-P|Q)$$

missä $A_+\psi = -\psi'(x) + 2x\psi(x)$ ja $A_-\psi(x) = \psi'(x)$.

RATKAISU 4: Lineaarisuuden nojalla riittää osoittaa että $f(x) = x^n \in E$ kaikilla n. Koska e^{x^2} kasvaa nopeammin kuin mikään polynomi, niin on olemassa $R > 0$, siten että $|x^{2n+2}e^{-x^2}| \leq 1$ kun $|x| > R$. Silloin $|x^{2n}e^{-x^2}| \leq |x|^{-2}$ tällaisilla x.

Nyt

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |x^{2n}| e^{-x^2} dx \\
&= \int_{|x| \leq R} |x^{2n} e^{-x^2}| dx + \int_{|x| > R} |x^{2n} e^{-x^2}| dx \\
&\leq C + 2 \int_R^{\infty} x^{-2} ds < \infty,
\end{aligned}$$

missä C on äärellistä koska $|x^{2n}|e^{-x^2}$ on rajoitettu äärellismittaisella välillä $[-R, R]$. Siten polynomit kuuluvat avaruuteen E.

Olkoot nyt P ja Q polynomeja. Lasketaan

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\pi}(P|A_+Q) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\overline{(-Q'(x)+2xQ(x))}e^{-x^2}dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\overline{Q'(x)}e^{-x^2} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\overline{2xQ(x)}e^{-x^2}dx \\
(*) &= \int_{-\infty}^{\infty} P'(x)\overline{Q(x)}e^{-x^2}dx \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} P(x)2x\overline{Q(x)}e^{-x^2}dx \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} P(x)2x\overline{Q(x)}e^{-x^2}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P'(x)\overline{Q(x)}e^{-x^2}dx \\
&= \sqrt{\pi}(A_-P|Q).
\end{aligned}
$$

Kohdassa (*) käytettiin osittaisintegrointia, jossa sijoitustermi $[P(x)Q(x)e^{-x^2}]_{-\infty}^{\infty}$ häviää.

5. Hermiten polynomit H_n, $n = 0, 1, 2, 3, ...$ määritellään kaavalla $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$. Osoita, että funktiot $e_n := (2^n n!)^{-1/2}H_n$ muodostavat ortonormaalin jonon edellisessä tehtävässä määritellyssä Hilbertin avaruudessa $E = L^2(w)$.

[Vihje: Osoita, että $A_+H_n(x) = H_{n+1}(x)$ ja $A_-H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$. Voit olettaa tunnetuksi, että $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.]

RATKAISU 5: Toimitaan kuten vihjeessä, eli osoitetaan, että $A_+H_n(x) = H_{n+1}(x)$ ja $A_-H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$. Otetaan käyttöön lyhentävä merkintä $Df(x) = (d/dx)f(x)$. Lasketaan

$$
\begin{aligned}
A_+H_n(x) &= 2xH_n(x) - DH_n(x) \\
&= 2xH_n(x) - [(-1)^n 2xe^{x^2}D^n e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2}D^{n+1}e^{-x^2}] \\
&= 2xH_n(x) - 2xH_n(x) + H_{n+1}(x) = H_{n+1}(x).
\end{aligned}
$$

Siten ensimmäinen yhtälö on osoitettu todeksi.

Selvästi pätee että $A_-H_1(x) = 2H_0(x)$ ja $A_-H_2(x) = 4H_1(x)$, joten toinen yhtälö on totta ainakin kun $n = 1$ tai $n = 2$. Oletetaan nyt että väite on totta kun $n \leq k$ ja osoitetaan että tällöin väite pätee myös kun $n = k + 1$. Lasketaan

$$\begin{aligned} A_- H_{k+1}(x) &= D(A_+ H_k(x)) = D(2xH_k(x) - DH_k(x)) \\ &= 2H_k(x) + 2xDH_k(x) - D^2 H_k(x) \\ &= 2H_k(x) + 2k(2xH_{k-1}(x) - DH_{k-1}(x)) \\ &= 2H_k(x) + 2k(A_+ H_{k-1}(x)) \\ &= 2(k+1)H_k(x), \end{aligned}$$

missä käytettiin ensimmäistä yhtälöä ja induktio-oletusta $DH_k(x) = A_- H_k(x) = 2kH_{k-1}(x)$. Siten yhtälö on todistettu kaikille n induktioperiaatteen nojalla.

Helposti nähdään, että edellisen tehtävän tulos pätee myös muodossa $(P|A_+^n Q) = (A_-^n P|Q)$. Tarkastellaan nyt Hermiten polynomeja H_n ja H_m. Ja oletetaan että $m > n$. Huomaa, että vihjeen perusteella $H_m = A_+^m H_0$ ja lisäksi että $A_-^m H_n = 0$. Siten, edellisen tehtävän nojalla

$$(H_n|H_m) = (H_n|A_+^m H_0) = (A_-^m H_n|H_0) = (0|H_0) = 0.$$

Näin ollen myös $(e_n|e_m) = 0$.

Lasketaan nyt edellisen kaltaisilla havainnoilla

$$\begin{aligned} (e_n|e_n) &= (2^n n!)^{-1}(H_n|H_n) \\ &= (2^n n!)^{-1}((2^n n!)H_0|H_0) \\ &= (H_0|H_0) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1. \end{aligned}$$

Siten on osoitettu että funktiot e_n muodostavat ortonormaalin jonon. Jos halutaan osoittaa että

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

voidaan toimia seuraavasti:

$$\begin{aligned} &(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx)^2 \\ =&(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx)(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy) \\ =& \int_{R^2} e^{-|X|^2} dX \\ =& \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr d\theta \\ =&2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr = \pi. \end{aligned}$$

Tässä käytettiin Fubinin lausetta ja merkittiin $X = (x, y) \in R^2$. Huomaa, että funktion re^{-r^2} integraalifunktio on helppo löytää!