Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 5 ratkaisuja (AP)
22.2.2012

1. (i) Jos E on Banach avaruus ja $A \subset E$, osoita, että joukko

$$conv(A) := \cap\{X : A \subset X,\ X \text{ konveksi } \}$$

on konveksi. Lisäksi, ko. joukko on pienin konveksi joukko joka sisältää A:n. [Joukko $conv(A)$ on A:n *konveksi verho*, ja sen sulkeumaa $\overline{conv}(A)$ kutsutaan A:n suljetuksi konveksiksi verhoksi.

(ii) Olkoon $A = \{0\} \cup \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^p$; tässä $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (ykkönen n:nnellä paikalla). Näytä että jokaisella $1 \leq p \leq \infty$,

$$\overline{conv}(A) = \{(x_j)_1^\infty :\ 0 \leq x_j \leq 1,\ \sum_1^\infty x_j \leq 1\}$$

RATKAISU 1: (i) Olkoon nyt $x, y \in\ conv(A)$, jolloin jokainen konveksi joukko X, joka sisältää A:n sisältää myös pisteet x ja y. Tällöin jokainen tällainen X sisältää myös kaikki pisteet $z_t = tx + (1-t)y$, missä $t \in [0, 1]$. Siten nämä pisteet kuuluvat myös kaikkien tällaisten joukkojen X leikkaukseen, joten $z_t \in\ conv(A)$ kaikilla $t \in [0, 1]$. Siten $conv(A)$ on konveksi ja suoraan määritelmästä seuraa, että jokainen A:n sisältävä konveksi joukko sisältä myös joukon $conv(A)$.

(ii) Harjoitusten 2 nojalla tiedetään että $\ell^1 \subset \ell^p$ kun $1 \leq p \leq \infty$, joten

$$A' = \{(x_j)_1^\infty :\ 0 \leq x_j \leq 1,\ \sum_1^\infty x_j \leq 1\}$$

on hyvin määritelty joukko. Pitää osoittaa, että A' on A:n suljettu konveksi verho.

Osoitetaan ensin että A' on suljettu avaruudessa ℓ^p. Määritellään kuvaukset $E_n : \ell^p \to \mathbb{K}$ kaavalla $E_n x = x_n$. Helposti nähdään että jokainen E_n on rajoitettu. Olkoon $B = \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n^{-1}([0, 1])$ ja $C = \cap_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{j=1}^n E_n)^{-1}([0, 1])$, jolloin selvästi B ja C ovat suljettuja, joten niin on myös $A' = B \cap C$.

Osoitetaan nyt että A' on konveksi. Olkoot $x, y \in A'$ ja $t \in [0, 1]$. Tällöin $0 \leq tx_j + (1-t)y_j \leq 1$ ja

$$\sum_1^\infty (tx_j + (1-t)y_j) = t + (1-t) = 1,$$

joten konveksisuus on osoitettu. Siis A' on suljettu ja konveksi joukko joka (selvästi) sisältää A:n.

Osoitetaan nyt että jokainen konveksi joukko K, joka sisältää A:n, sisältää myös pisteet x jotka ovat muotoa

$$x = \sum_{1}^{n} a_i e_i,$$

missä $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in [0,1]$ ja $\sum_1^n a_i \leq 1$. Tällöin erityisesti $conv(A)$ sisältää tällaiset pisteet. Olkoon siis K konveksi ja $A \subset K$. Oletetaan ensin että $\sum_1^n a_i = 1$. Selvästi väite on totta jos $n = 2$ (tai $n = 1$). Oletetaan nyt että väite on tosi kun $n = k$ ja

$$x = \sum_{1}^{k+1} a_i e_i,$$

missä $\sum_1^{k+1} a_i = 1$. Tällöin $a_{k+1} = 1 - \sum_1^k a_i$ ja voidaan kirjoittaa

$$x = a_{k+1}e_{k+1} + (1 - a_{k+1})(\sum_{1}^{k} a_i' e_i),$$

missä $a_i' = a_i/(1 - a_{k+1})$. Tällöin $\sum_1^n a_i' = 1$ ja oletusten ja konveksisuuden nojalla $x \in K$. Väite on nyt todistettu käyttämällä induktioperiaatetta. Lopuksi todetaan, että jos $\sum_1^n a_i = a \leq 1$, niin koska $0 \in A$, niin voidaan kirjoittaa

$$x = a(\sum_{1}^{n}(a_i/a)e_i) + (1 - a)0,$$

joka palauttaa väitteen tapaukseen jossa $\sum_1^n a_i = 1$.

Olkoon nyt $x \in A'$ ja $\epsilon > 0$. On olemassa indeksi n_ϵ siten että jos määritellään $x_j^\epsilon = x_j$ kun $j \leq n_\epsilon$ ja $x_j^\epsilon = 0$ kun $j > n_\epsilon$, niin

$$\|x - x^\epsilon\|_p \leq \|x - x^\epsilon\|_1 < \epsilon.$$

Mutta selvästi $x^\epsilon \in conv(A)$. Siten $x \in \overline{conv}(A)$.

Tiedetään siis että $A' \subset \overline{conv}(A)$. Toisaalta, koska A' on konveksi ja sisältää A:n, niin $conv(A) \subset A'$. Tällöin myös $\overline{conv}(A) \subset \overline{A'} = A'$. Tehtävä on nyt ratkaistu.

2. Olkoon E sisätuloavaruus ja $x_n, x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, vektoreita joille

(i) $\|x_n\| \to \|x\|$ ja (ii) $(x_n|x) \to \|x\|^2$, kun $n \to \infty$.

Näytä, että jos molemmat ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa, silloin $\|x_n - x\| \to 0$ kun $n \to \infty$, mutta kumpikaan ehto erikseen ei tähän riitä.

RATKAISU 2: Oletetaan (i) ja (ii). Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= (x_n - x|x_n - x)\\ &= (x_n|x_n) - (x_n|x) - (x|x_n) + (x|x)\\ &= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - (x_n|x) - \overline{(x_n|x)}.\end{aligned}$$

Oletusten nojalla tämä suppenee nollaan, joten $\|x_n - x\| \to 0$.

Kumpikaan ehto ei riitä yksinään: jos asetetaan $x_n = (-1)^n x$ jollain $x \neq 0$, niin silloin selvästi (i) eli $\|x_n\| \to \|x\|$, mutta ei selvästikään $\|x_n - x\| \to 0$.

Myöskään ehto (ii) ei yksinään riitä. Otetaan vaikkapa tarkasteluun jonoavaruus ℓ^2. Olkoon x jokin yksikkövektori ℓ^2:ssa ja määritellään $x_n = x + e_n$ (missä e_n kuten ensimmäisessä tehtävässä). Selvästikään jono (x_n) ei suppene, mutta

$$(x_n|x) = (x|x) + (e_n|x) \to (x|x) = \|x\|^2,$$

koska $(e_n|x) \to 0$.

3. Oletamme että $1 \leq p < \infty$ ja $p \neq 2$. Osoita, että silloin avaruudet ℓ^p ja $L^p(0,1)$ eivät ole Hilbertin avaruuksia (siis normi $\|\cdot\|_p$ ei ole minkään sisätulon indusoima).
[*Vihje.* Testaa suunnikasyhtälön voimassaoloa sopivilla yksinkertaisilla funktioilla f ja g.]

RATKAISU 3: Tarkastellaan funktioita $f(t) = \chi_{[0,1/2]}(t) - \chi_{[1/2,1]}(t)$ ja $g(t) \equiv 1$. Tällöin kaikilla $1 \leq p < \infty$ pätee $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ ja $\|f - g\|_p = \|f + g\|_p = 2^{1-1/p}$. Lasketaan nyt

$$2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2 = 4$$

ja

$$\|f + g\|_p^2 + \|f - g\|_p^2 = 2^{3-2/p}.$$

Nämä luvut ovat erisuuret jos $p \neq 2$, joten tällaisella p:n arvolla ei suunnikasyhtälö toteudu, eikä avaruus ole siten Hilbert.

Vastaavasti voidaan toimia jonoavaruuksien tapauksessa. Määritellään $x = e_1 - e_2$ ja $y = e_1 + e_2$, jolloin $\|x\|_p = \|y\|_p = 2^{1/p}$ ja $\|x+y\|_p = \|x-y\|_p = 2$. Kuten edellisessä kohdassa, nähdään että

$$2\|x\|_p^2 + 2\|y\|_p^2 = 2^{2+2/p}$$

ja

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 8.$$

Samoin huomataan, että luvut ovat erisuuret jos $p \neq 2$, joten ℓ^p ei ole Hilbert tällaisella p:n arvolla.

4. Olkoon $x_0 = (1/n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ sekä $A = \overline{conv}(x_0 - e_n : n \in \mathbb{N})$, vrt. Teht. 1. Osoita, että $\sup\{\|x\|_2^2 : x \in A\} = 1 + \|x_0\|_2^2$, mutta $\|x\|_2^2 < 1 + \|x_0\|_2^2$ jokaisella $x \in A$. Toisin sanoen, A on Hilbert avaruuden konveksi, suljettu ja rajoitettu osajoukko, jossa ei ole normin *maksimoivaa* alkiota.

RATKAISU 4: Tarkastellaan joukkoa $B = \{x_0 - e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Huomataan, että $|x_0(n) - e_n(n)| = 1 - 1/n$ ja $|x_0(k) - e_n(k)| = 1/n$, jos $n \neq k$. Näillä havainnoilla nähdään, että

$$\|x_0 + e_n\|_2^2 = (1 - 1/n)^2 - (1/n)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (1/k)^2 \to 1 + \|x_0\|_2^2$$

kun $n \to \infty$ ja lisäksi että $\|x_0 + e_n\|_2^2 < 1 + \|x_0\|_2^2$ kaikilla n.

Tehtävää 1(ii) mukaillen $A \subset \{x_0 - z : 0 \leq z_j \leq 1, \sum_j^{\infty} z_j \leq 1\}$. Riittää siis osoittaa, että mikäli z on kuten edellä, niin $\|x_0 - z\|_2^2 < 1 + \|x_0\|_2^2$. Kun $z_j \in [0, 1]$, niin

$$|x_0(j) - z_j|^2 + |x_0(n) - \alpha|^2 \leq |x_0(j)|^2 + |x_0(n) - \alpha - z_j|^2$$

kaikilla $n \geq j$ ja $\alpha \geq 0$. Tämän näkee helposti kirjoittamalla termit epäyhtälössä auki. Siten, koska $\sum z_j \leq 1$, niin saadaan aina

$$\sum_1^k |x_0(j) - z_j|^2 \leq |x_0(k) - 1|^2 + \sum_1^{k-1} |x_0(j)|^2.$$

Huomaa että aina on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten että $0 \leq z_N < 2/N$, sillä muutenhan $\sum_j z_j = \infty$. Tällöin $|x_0(N)|^2 > |x_0(N) - z_N|^2 + \epsilon$ jollain $\epsilon > 0$. Koska $x_0 - z \in \ell^2$, niin on olemassa indeksi $n_\epsilon > N$ siten että $\sum_{j=n_\epsilon+1}^{\infty} |1/j - z_j|^2 < \epsilon$. Voidaan olettaa että $n_\epsilon > 2$. Nyt lasketaan

$$\begin{aligned}
\|x_0 - z\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{N-1} |1/j - z_j|^2 + |1/N - z_N|^2 \\
&\quad + \sum_{j=N+1}^{n_\epsilon} |1/j - z_j|^2 + \sum_{j=n_\epsilon+1}^{\infty} |1/j - z_j|^2 \\
&< |x_0(n_\epsilon) - 1|^2 + \sum_{j=1}^{n_\epsilon - 1} |x_0(j)|^2 + \epsilon - \epsilon \\
&= \|x_0 + e_{n_\epsilon}\|_2^2 < 1 + \|x_0\|_2^2.
\end{aligned}$$

Väite on näin ollen todistettu.

5. Olkoon $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tarkastellaan Volterran operaattoria $T : C(0,1) \to C(0,1)$,

$$Tf(t) = \int_0^t K(t,s)f(s)ds.$$

Osoita, että riittävän suurilla n operaattorin T iteraatti T^n on kontraktio avaruudessa $C(0,1)$. Osoita tämän tuloksen ja HT4/Teht.5 avulla että jokaisella $g \in C(0,1)$, integraaliyhtälöllä

$$f(t) + \int_0^t K(t,s)f(s)ds = g(t), \qquad t \in [0,1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in C(0,1)$.
[*Vihje*: Selvitä minkälaisen lisätekijän antaa *määräämättömän* integraalin iterointi n kertaa peräkkäin.]

RATKAISU 5: Tarkastellaan ensin operaattoria T. Tässä vaiheessa on selvää että kuvaus T on hyvin määritelty $C(0,1) \to C(0,1)$. Merkitään M:llä funktion K supremumia (eli maksimia) joukossa $[0,1]^2$. Osoitetaan että

$$|T^n f(t)| \leq \frac{M^n t^n \|f\|_\infty}{n!}$$

käyttämällä induktiota. Olkoon siis $f \in C(0,1)$, jolloin

$$|Tf(t)| \leq \int_0^t |K(t,s)||f(s)|ds \leq Mt\|f\|_\infty,$$

joten väite on tosi jos $n = 1$. Oletetaan nyt että väite on tosi kun $n = k$, eli että

$$|T^k f(t)| \leq \frac{M^k t^k \|f\|_\infty}{k!}$$

ja tarkastellaan operaattoria T^{k+1}. Oletusten nojalla

$$\begin{aligned}
|T^{k+1}f(t)| = |T(T^k f(t)| &= |\int_0^t K(t,s)(T^k f(s))ds| \\
&\leq \int_0^t \frac{MM^k s^k \|f\|_\infty ds}{k!} \\
&= \frac{M^{k+1}t^{k+1}\|f\|_\infty}{(k+1)!}.
\end{aligned}$$

Siten väite on osoitettu induktiolla todeksi. Saadusta arviosta seuraa helposti että

$$\|T^n f\|_\infty \leq \frac{M^n \|f\|_\infty}{n!},$$

ja suurilla n saadaan tällöin kontraktio.

Tarkastellaan nyt tehtävän varsinaista yhtälöä. Merkitään

$$Vf(t) = g(t) - Tf(t).$$

Induktiolla voidaan osoittaa että

$$V^n f(t) = (-1)^n T^n f(t) + G_n(t),$$

missä $G_n \in C(0,1)$ ei riipu funktion f valinnasta. Olkoon nyt n sellainen että T^n on aito kontraktio vakiolla $C < 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} |V^n f(t) - V^n h(t)| &= |(-1)^n T^n f(t) + G_n(t) - (-1)^n T^n h(t) - G_n(t)| \\ &= |T^n f(t) - T^n h(t)| \leq |T^n (f-h)(t)| \leq C\|f-g\|_\infty. \end{aligned}$$

Siten on osoitettu että V^n on aito kontraktio. Edellisten harjoitusten perusteella V:llä on tällöin yksikäsitteinen kiintopiste avaruudessa $C(0,1)$.