Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 4 ratkaisuja (AP)
15.2.2012

1. Osoita että $L^q(0,1) \subset L^p(0,1)$, jos $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
Entä sisältyykö $L^p(\mathbb{R})$ avaruuteen $L^q(\mathbb{R})$ joillakin $p \neq q$? Jos ei, anna vastaesimerkit.
Kolmanneksi, jos $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ ja $1 \leq p \leq q \leq \infty$, näytä, että silloin $f \in L^r(\mathbb{R})$ jokaisella indeksillä $p \leq r \leq q$.

RATKAISU 1: (1) Olkoot p ja q kuten tehtävänannossa ja $f \in L^q(0,1)$. Oletetaan aina että $p < q$, sillä tapaus $p = q$ on toki selvä. Mikäli $p < q = \infty$, niin pätee

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 |f(x)|^p dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^p dx = \|f\|_\infty^p.$$

Oletetaan nyt $p < q < \infty$. Asetetaan $r = q/p$ ja $s = q/(q-p)$, jolloin $1/r + 1/s = 1$ ja voidaan käyttää Hölderin epäyhtälöä;

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 |f(x)|^p dx \leq \||f|^p\|_r \|1\|_s = (\int_0^1 |f(x)|^q dx)^{p/q} (\int_0^1 dx)^{(q-p)/q} \leq \|f\|_q^p.$$

Yhdistämällä edelliset havainnot saadaan $L^q(0,1) \subset L^p(0,1)$ kuten tehtävänannossa. Lisäksi $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

(2) Olkoon $r \geq 0$ ja määritellään reaaliakselilla funktiot f_r ja g_r seuraavasti: $f_r(x) = x^{-r}\chi_{[0,1]}(x)$ ja $g_r(x) = x^{-r}\chi_{[1,\infty)}(x)$. Tulkitaan että $f_0(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ ja $g_0(x) = \chi_{[1,\infty)}(x)$. Selvästi $g_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R})$ kaikilla $1 \leq p < \infty$. Olkoon nyt $1 \leq p < q \leq \infty$. Tunnetusti

$$\|f_r\|_p^p = \int_0^1 x^{-pr} dx < \infty$$

täsmälleen silloin kun $r < 1/p$, joten ottamalla $r \in (1/q, 1/p)$ (ja tietysti $r \in (0, 1/p)$, jos $q = \infty$), saadaan $f_r \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R})$. Vastaavasti nähdään, että $g_r \in L^q(\mathbb{R})$ täsmälleen silloin kun $r > 1/q$. Ottamalla taas $r \in (1/q, 1/p)$, saadaan $g_r \in L^q(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R})$. Siten sisältyvyys ei päde kumpaankaan suuntaan.

(3) Olkoot p ja q kuten tehtävänannossa ja tarkastellaan ensin tapaus $p < r < q = \infty$. Olkoon S joukko jossa $|f(x)| \geq 1$. Koska $f \in L^p(\mathbb{R})$, niin joukon S täytyy olla äärellismittainen; otetaan käyttöön merkintä $|S|$,

jolla tarkoitetaan S:n mittaa. Nyt huomataan, että joukossa $\mathbb{R} \setminus S$ pätee $|f(x)|^r \leq |f(x)|^p$, joten

$$\begin{aligned}\|f\|_r^r &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^r dx = \int_S |f(x)|^r dx + \int_{\mathbb{R}\setminus S} |f(x)|^r dx \\ &\leq \int_S \|f\|_\infty^r dx + \int_{\mathbb{R}\setminus S} |f(x)|^p dx \leq |S| \|f\|_\infty^r + \|f\|_p^p < \infty.\end{aligned}$$

Väite on todistettu kun $q = \infty$. Jos taas $p < r < q < \infty$, niin käytetään taas joukkoa S ja huomataan että

$$\begin{aligned}\|f\|_r^r &= \int_S |f(x)|^r dx + \int_{\mathbb{R}\setminus S} |f(x)|^r dx \leq \int_S |f(x)|^q dx + \int_{\mathbb{R}\setminus S} |f(x)|^p dx \\ &\leq \|f\|_p^p + \|f\|_q^q < \infty,\end{aligned}$$

missä käytettiin edellisiä havaintoja ja huomiota että joukossa S pätee $|f(x)|^q \geq |f(x)|^r$. Tehtävä on nyt ratkaistu.

2. Osoita, että *epälineaarisella* integraaliyhtälöllä

$$2f(x) - \int_0^1 (x-s) f(s)^3 ds = 1, \qquad x \in [0,1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu joukossa $\{f \in C(0,1) : \|f\|_\infty \leq 1\}$.

RATKAISU 2: Tarkastellaan kuvausta $T : C(0,1) \to C(0,1)$ joka on määritelty kaavalla

$$Tf(x) = 2^{-1} \int_0^1 (x-s) f(s)^3 ds + 2^{-1}.$$

Olkoot $x, y \in [0,1]$ ja $f \in C(0,1)$. Tällöin

$$|\int_0^1 (x-s) f(s)^3 ds - \int_0^1 (y-s) f(s)^3 ds| \leq \int_0^1 |f(s)|^3 |x-y| ds \leq \|f\|_\infty^3 |x-y|,$$

mistä nähdään että Tf on jatkuva, siis $T : C(0,1) \to C(0,1)$ on hyvin määritelty. Mikäli T:llä on yksikäsitteinen kiintopiste joukossa $B = \{f \in C(0,1) : \|f\|_\infty \leq 1\}$, niin tämä kiintopiste on annetun integraaliyhtälön yksikäsitteinen ratkaisu. Jos $f \in B$ ja $x \in [0,1]$, niin

$$|Tf(x)| \leq 2^{-1} \int_0^1 ds + 2^{-1} = 1,$$

mistä nähdään, että $T(B) \subset B$. Jos lisäksi $g \in B$ ja $x \in [0,1]$, niin

$$\begin{aligned}
|(Tf - Tg)(x)| &= 2^{-1}|\int_0^1 (x-s)(f(s)^3 - g(s)^3)ds| \\
&\leq 2^{-1}\int_0^1 |x-s||f(s)-g(s)||f(s)^2 + g(s)^2 + f(s)g(s)|ds \\
&\leq 2^{-1}\int_0^1 3|x-s|\|f-g\|_\infty ds = (3/2)\|f-g\|_\infty \int_0^1 |x-s|ds \\
&\leq (3/4)\|f-g\|_\infty,
\end{aligned}$$

joten T on aito kontraktio B:ssä. Siten, koska B on täydellinen, voimme käyttää Banachin kiintopistelausetta, joka takaa että T:llä on yksikäsitteinen kiintopiste joukossa B. Tämä kiintopiste on myös tehtävän yhtälön yksikäsitteinen ratkaisu.

3. Olkoon $f_n(x) = (-1)^n x^n$ kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja $\sum f_n$ avaruudessa $L^p(0,1)$, kun $1 \leq p < \infty$? Jos näin on, suppeneeko ko. sarja absoluuttisesti eli itseisesti ?

RATKAISU 3: Merkitään $F_n = \sum_{k=1}^n f_n$ ja $f(x) = -x/(1+x)$. Muistellaan edellisten harjoitusten tehtävää 3, jonka mukaan $|f(x) - F_n(x)| = |x|^{n+1}/|1+x|$. Siten

$$\|F_n - f\|_p^p = \int_0^1 \frac{x^{p(n+1)}dx}{(1+x)^p} \leq \int_0^1 x^{p(n+1)}dx = \frac{1}{p(n+1)+1}.$$

Välittömästi nähdään, että $F_n \to f$ avaruudessa $L^p(0,1)$.

Helpolla laskulla nähdään että

$$\|f_n\|_p^p = \int_0^1 x^{np}dx = \frac{1}{np+1}.$$

Suora havainto tästä on että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} (np+1)^{-1/p} = \infty.$$

Summa ei siis suppene absoluuttisesti.

4. Olkoon E Banachin avaruus, $M \subset E$ suljettu vektorialiavaruus ja muodostetaan tekijäavaruus $E/M = \{x + M : x \in E\}$. Vektoriavaruudesta E/M tulee normiavaruus kun asetetaan

$$\|x + M\| = \inf\{\|x - m\| : m \in M\}.$$

Selvästi $\|x + M\| \leq \|x\|$ kaikilla $x \in E$.

Tehtävä: Osoita, että $(E/M, \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus.

[Vihje: Osoita, että avaruuden E/M absoluuttisesti summautuvat sarjat ovat summautuvia. Luentomuistiinpanojen s. 60 harjoitustehtävän yhteydessä lisävihjeitä; s. 46 ja 51 lisätietoja avaruudesta E/M.]

RATKAISU 4: Luentojen lauseen 3.22 nojalla riittää osoittaa että jokainen absoluuttisesti summautuva sarja suppenee. Oletataan siis että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + M\| < \infty.$$

Jos $x_n \in M$ asetetaan $y_n = 0$ ja jos $x_n \notin M$, niin tekijäavaruuden normin määritelmän nojalla löytyy $y_n \in x_n + M$, jolle $\|y_n\| \leq 2\|x_n + M\|$. Siis, jokaiselle x_n löytyy $y_n \in x_n + M$, jolle $\|y_n\| \leq 2\|x_n + M\|$. Huomaa, että tällöin pätee $y_n + M = x_n + M$. Koska summa $\sum \|x_n + M\|$ on äärellistä, niin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + M\| < \infty.$$

Siten jono (y_n) on absoluuttisesti summautuva E:ssä. Koska E on Banach, niin lauseen 3.22 mukaan on olemassa $y = \sum y_n$.

Huomataan että kaikille $x \in E$ pätee

$$\|x\| = \|x + 0\| \geq \|x + M\|,$$

sillä 0 on eräs avaruuden M piste. Siten, jos

$$\lim_{N \to \infty} \|y - \sum_{n=1}^{N} y_n\| = 0,$$

niin myös

$$\lim_{N \to \infty} \|y + M - \sum_{n=1}^{N} (x_n + M)\| = \lim_{N \to \infty} \|(y - \sum_{n=1}^{N} y_n) + M\| = 0,$$

missä käytettiin tietoa että alkiot y_n on valittu siten että $x_n + M = y_n + M$. Nähdään, että sarja suppenee kohti alkiota $y + M$, ja näin ollen E/M on Banach.

5. Todista seuraava Banachin kiintopistelauseen johdannainen:

Olkoon D Banachin avaruuden E suljettu osajoukko ja $T : D \to D$. Merkitään T^n:llä kuvauksen T n-kertaista iteraattia, so. $T^n = T \circ T^{n-1}$.

Jos T^n on aito kontraktio jollakin $n \in \mathbb{N}$, osoita että silloin kuvauksella T on yksikäsitteinen kiintopiste joukossa D.

RATKAISU 5: Koska D on täydellisen avaruuden suljettu osajoukko, se on täydellinen. Koska $T : D \to D$, niin myös $T^n : D \to D$. Olkoon nyt n sellainen luku että T^n on aito kontraktio D:ssä, jolloin Banachin kiintopistelause antaa yksikäsitteisen kiintopisteen $x \in D$; siis $T_n x = x$. Sovelletaan tähän yhtälöön vielä kerran kuvausta T, jolloin saadaan $T^{n+1}x = T^n T x = Tx$, mistä nähdään että Tx on kuvauksen T^n kiintopiste. Mutta koska kiintopiste on yksikäsitteinen täytyy olla $Tx = x$, joten x on myös kuvauksen T kiintopiste.

Osoitetaan lopuksi ettei T:llä voi olla muita kiintopisteitä kuin x. Jos y on T:n kiintopiste, niin $Ty = y$, joten

$$T^n y = T^{n-1} T y = T^{n-1} y = T^{n-2} y = ... = Ty = y,$$

siis y on myös kuvauksen T^n kiintopiste. Siten $y = x$, eli kiintopiste on yksikäsitteinen.