Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 3 ratkaisuja (AP)
8.2.2012

1. Tarkastellaan avaruuden $C(0,1)$ osajoukkoja M, varustettuna normilla $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Onko M Banach avaruus, kun

a) $M = \{f \in C(0,1) : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$,
b) $M = \{f \in C(0,1) : f(0) = 0 \text{ ja } f(1) = 1\}$,
c) $M = \{f \in C(0,1) : \text{ jollekin } \varepsilon > 0,\ f(x) = 0 \text{ kun } 0 \leq x < \varepsilon\}$.

RATKAISU 1: Koska on tunnettua, että $C(0,1)$ on Banach-avaruus, riittää tarkastella ovatko kyseiset joukot M avaruuden $C(0,1)$ suljettuja aliavaruuksia.

(a) Integraalin lineaarisuudesta seuraa, että jos $f, g \in M$ ja $a, b \in \mathbb{K}$, niin

$$\int_0^1 (af + bg)(x)dx = a\int_0^1 f(x)dx + b\int_0^1 g(x)dx = 0,$$

joten M on aliavaruus.

Määritellään nyt kuvaus $T : C(0,1) \to \mathbb{K}$ kaavalla $Tf = \int_0^1 f(x)dx$. Helposti nähdään, että T on rajoitettu (eli jatkuva) lineaarikuvaus. Avaruus M on origon (joka on suljettu) alkukuva kuvauksen T suhteen, joten se on suljettu. Siis M on Banach.

(b) Välittömästi nähdään, ettei M ole vektoriavaruus; funktio $f(x) = x$ kuuluu joukkoon M, mutta $2f$ ei.

Tarkastellaan kuitenkin huvin vuoksi, onko M suljettu. Otetaan käyttöön kuvauset E_x, missä $x \in [0,1]$, $E_x f = f(x)$. Selvästi tällaiset kuvauset ovat jatkuvia lineaarikuvauksia $C(0,1) \to \mathbb{K}$. Nyt huomataan, että $M = E_0^{-1}\{0\} \cap E_1^{-1}\{1\}$, mistä nähdään että M on suljettu.

(c) Olkoot $f, g \in M$ ja $a, b \in \mathbb{K}$. Tällöin on olemassa positiiviset luvut ϵ_1 ja ϵ_2 siten että $f(x) = 0$ kun $x \in [0, \epsilon_1)$ ja $g(x) = 0$ kun $x \in [0, \epsilon_2)$. Asetetaan nyt $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$, jolloin nähdään että $(af + bg)(x) = af(x) + bg(x) = 0$ kun, $x \in [0, \epsilon)$. On osoitettu että M on vektoriavaruus.

Tarkastellaan funktiojonoa (f_n), missä $f_n(x) = \max(x - 1/n, 0)$. Selvästi jokainen f_n kuuluu avaruuteen M. Merkitään $f(x) = x$, jolloin helposti nähdään että $\|f_n - f\|_\infty = 1/n$. Siis $f_n \to f$ avaruudessa $C(0,1)$, mutta $f \notin M$, joten M ei ole suljettu.

2. Olkoon E Banach avaruus ja $M \subset E$ sen aito vektorialiavaruus, siis $M \neq E$. Osoita, että M ei voi olla avoin E:ssä.

RATKAISU 2: Oletetaan että M olisi avoin. Koska $0 \in M$, niin on olemassa $r > 0$ siten että $B(0,r) \subset M$. Koska M on aito aliavaruus, on olemassa $x \in E \setminus M$. Asetetaan nyt $\lambda = r/2\|x\|$, jolloin $\|\lambda x\| = r/2$, siis $\lambda x \in B(0,r) \subset M$. Mutta, koska M on vektoriavaruus, niin myös $x = \lambda^{-1}\lambda x$ kuuluu avaruuteen M. Tämä on ristiriita, joten M ei voi olla avoin.

3. Olkoon $f_n(x) = (-1)^n x^n$ kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja $\sum f_n$ avaruudessa $C(0,1)$?

RATKAISU 3: Heti nähdään, ettei $(f_n(1))$ suppene, joten sarja ei suppene avaruudessa $C(0,1)$.

Jos kuitenkin halutaan tarkastella (huvin vuoksi) suppeneeko jono (f_n) tasaisesti esimerkiksi välillä $[0,1)$, niin voidaan toimia seuraavasti. Huomataan, että jos $x \in [0,1)$, niin $f_n(x) \to -x/(1+x)$; tämä on geometrinen sarja luvulle $-x$. Siis asetetaan $f(x) = -x/(1+x)$, kun $x \in [0,1)$. Samoin, nähdään että

$$f(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}.$$

Nähdään, että

$$\sup_{t \in [0,1)} |f_n(t) - f(t)| = 1/2$$

kaikilla n, joten suppeneminen ei ole tasaista välillä $[0,1)$.

4. Olkoon E Banach avaruus ja $T : E \to \mathbb{K}$ lineaarinen kuvaus (kuten aina $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$). Kuvauksen T *ydin* on

$$Ker(T) = \{x \in E : Tx = 0\}.$$

Osoita, että T on jatkuva jos ja vain jos $Ker(T)$ on E:n suljettu aliavaruus.

[Vihje: suuntaan " $\Leftarrow$ ", oleta ettei T ole jatkuva origossa ja näytä että silloin $Ker(T)$ ei ole suljettu.]

RATKAISU 4: Jos $x, y \in \ker T$ ja $a, b \in \mathbb{K}$, niin $T(ax+by) = aTx+bTy = 0$, joten $\ker T$ on avaruuden E aliavaruus.

Mikäli T on jatkuva, niin $\ker T = T^{-1}\{0\}$ on suljettu, koska se on suljetun joukon alkukuva jatkuvassa kuvauksessa.

Oletetaan nyt ettei T ole jatkuva, ja näytetään ettei tällöin $\ker T$ voi olla suljettu. Koska T ei ole jatkuva, niin kaikille n on olemassa yksikkövektori x_n siten että $|Tx_n| \geq n$. Asetetaan nyt $y_n = x_n/Tx_n$, jolloin tietenkin $Ty_n = 1$ kaikille n. Huomataan että $z_n = y_1 - y_n \in \ker T$ kaikilla. Lisäksi $\|y_n\| \leq 1/n$, joten $z_n \to y_1$ avaruudessa E. Mutta $y_1 \notin \ker T$, jolloin $\ker T$ ei voi olla suljettu.

5. Kun $0 < \alpha < 1$, olkoon Lip_α sellaisten funktioiden $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ joukko, joille

$$\|f\|_\alpha = |f(0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha} < \infty.$$

Tällaisia funktioita kutsutaan kertaluvun α *Lipschitz-funktioksi*, tai myös *Hölder-jatkuviksi* funktioiksi (eksponentilla α).

Näytä aluksi, että Lip_α on vektoriavaruus ja että $\|\cdot\|_\alpha$ on normi. Osoita sen jälkeen, että $(Lip_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ on Banachin avaruus.

Huom: $\quad |f(s) - f(t)| \leq \|f\|_\alpha \cdot |s-t|^\alpha$ kaikilla $s, t \in [0,1]$, $f \in Lip_\alpha$.

RATKAISU 5: Olkoon $f, g \in Lip_\alpha$. Nyt

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_\alpha &= |f(0)+g(0)| + \sup_{s\neq t} \frac{|f(s)+g(s)-f(t)-g(t)|}{|s-t|^\alpha} \\
&\leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{s\neq t} \left(\frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|^\alpha} + \frac{|g(s)-g(t)|}{|s-t|^\alpha} \right) \\
&\leq \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha,
\end{aligned}$$

Mistä nähdään, että $f+g \in Lip_\alpha$ ja että $\|\cdot\|_\alpha$ toteuttaa normin ehdon (N1).

Jos lisäksi $\lambda \in \mathbb{K}$, niin

$$\|\lambda f\|_\alpha = |\lambda f(0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|\lambda f(s) - \lambda f(t)|}{|s-t|^\alpha} = |\lambda| \|f\|_\alpha.$$

Tästä nähdään että $\lambda f \in Lip_\alpha$ ja että normin ehto (N2) toteutuu.

Selvästi $\|0\|_\alpha = 0$. Jos oletetaan että $\|f\|_\alpha = 0$, niin ensinnäkin pitää olla $f(0) = 0$. Toisaalta, jos olisi piste $t \in (0,1]$, jolle $f(t) \neq 0$, niin

$$\frac{|f(t) - f(0)|}{|t-0|^\alpha} = \frac{|f(t)|}{t^\alpha} > 0,$$

mistä nähdään ettei normi voi tällöin olla nolla. Siis $\|f\|_\alpha = 0$ jos ja vain jos $f = 0$ ja normin ehto (N3) on voimassa. Nyt on osoitettu että Lip_α on normiavaruus.

Osoitetaan nyt täydellisyys, eli että jokainen Cauchyn jono suppenee. Olkoon siis (f_n) Cauchy avaruudessa Lip_α. Jos $\varepsilon > 0$ ja n_ε on sellainen että

$$\|f_n - f_k\|_\alpha < \varepsilon,$$

silloin kun $k, n > n_\varepsilon$, niin näille n ja k pätee toki

$$|f_n(0) - f_k(0)| \leq \|f_n - f_k\|_\alpha < \varepsilon.$$

Siten $(f_n(0))$ on Cauchyn jono reaaliakselilla. Olkoon nyt $t \in (0,1]$. Edellisillä valinnoilla n ja k pätee nyt

$$\begin{aligned}
|f_n(t) - f_k(t)| &\leq |f_n(t) - f_k(t) - (f_n(0) - f_k(0)) + f_n(0) - f_k(0)| \\
&\leq |f_n(t) - f_k(t) - (f_n(0) - f_k(0))| + |f_n(0) - f_k(0)| \\
&\leq t^\alpha \frac{|f_n(t) - f_k(t) - (f_n(0) - f_k(0))|}{t^\alpha} + |f_n(0) - f_k(0)| \\
&\leq t^\alpha \|f_n - f_k\|_\alpha + \|f_n - f_k\|_\alpha \leq 2\|f_n - f_k\|_\alpha < 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

joten nähdään että jokaiselle $t \in [0,1]$ jono $(f_n(t))$ on Cauchy reaaliakselilla. Koska $\mathbb{K}$ on täydellinen, niin jokainen jono $(f_n(t))$ suppenee (eli jono suppenee pisteittäin) kohti jotain pistettä $f(t)$ (siis pisteittäistä rajafunktiota). Osoitetaan seuraavaksi että näin saatu funktio f on avaruudessa Lip_α. Riittää osoittaa että

$$\sup_{t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty.$$

Mutta nythän kaikilla $s \neq t$ pätee

$$\frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} = \lim_{n \to \infty} \frac{|f_n(t) - f_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\alpha < \infty,$$

sillä jokainen Cauchy jono on rajoitettu. Siis on osoitettu että $f \in Lip_\alpha$.

Lopuksi vielä pitää näyttää että $f_n \to f$ avaruuden Lip_α normissa. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sellainen indeksi jolle $\|f_n - f_k\|_\alpha < \varepsilon/2$ ja $|f_n(0) - f(0)| < \varepsilon/2$ kunhan $k, n > n_\varepsilon$. Nyt

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_\alpha &= |f_n(0) - f(0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|f_n(s) - f(s) - (f_n(t) - f(t))|}{|s-t|^\alpha} \\
&\leq |f_n(0) - f(0)| + \sup_{s \neq t} \lim_{k \to \infty} \frac{|f_n(s) - f_k(s) - (f_n(t) - f_k(t))|}{|s-t|^\alpha} \\
&\leq |f_n(0) - f(0)| + \lim_{k \to \infty} \|f_n - f_k\|_\alpha < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Siis on osoitettu että $f_n \to f$ avaruudessa Lip_α. Näin ollen tehtävä on suoritettu, eli Lip_α on osoitettu Banachin avaruudeksi.