Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 2 ratkaisut (AP)
1.2.2012

1. Olkoon $1 < p < \infty$. Etsi jono vektoreita $(x^{(n)}) \subset \ell^p$, joille pätee:

$\|x^{(n)}\|_p \leq 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, mutta jonolla $(x^{(n)})$ ei ole yhtään osajonoa, joka suppenee ℓ^p:n normin $\|\cdot\|_p$ suhteen.

[*Huom.:* Tässä $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Esimerkin perusteella suljettu yksikköpallo B_{ℓ^p} on rajoitettu ja suljettu joukko, joka *ei* ole kompakti avaruudessa ℓ^p.]

RATKAISU 1: Olkoon e_n sellainen jono, jonka n. indeksi on 1 ja muut nollia. Selvästi kaikilla n ja kaikilla $p \in (1, \infty)$ on avaruuden ℓ^p yksikkövektori. Jos $n \neq k$, niin

$$\|e_n - e_k\|_p = 2^{1/p}.$$

Huomataan nyt että jono (e_n) on tehtävässä pyydettyä muotoa. Mikään sen osajono ei voi supeta koska jonon kahden eri alkion välinen etäisyys on aina $2^{1/p}$.

2. Olkoon $1 \leq p < q < \infty$. Näytä, että $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ kun $x = (x_n) \in \ell^p$. Päättele, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$ kun $1 \leq p < q < \infty$.

[*Vihje.* Tutki aluksi sellaista jonoa $x = (x_n) \in \ell^p$ jolle $\|x\|_p = 1$.]

RATKAISU 2: Tehdään kuin vihjeessä. Olkoon p ja q kuten tehtävässä ja olkoon x avaruuden ℓ^p yksikkövektori. Tällöin $|x_k| \leq 1$ kaikilla k, jolloin pätee $|x_k|^q \leq |x_k|^p$. Siten nähdään

$$\|x\|_q = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q)^{1/q} \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/q} = \|x\|_p^{p/q} = 1 = \|x\|_p.$$

Jos nyt $x \in \ell^p$ on mielivaltainen (mutta ei nolla, jos se on nolla niin tilanne on triviaali), niin $\bar{x} = x/\|x\|_p$ on avaruuden ℓ^p yksikkövektori. Siten

$$\|\bar{x}\|_q = \|x\|_q/\|x\|_p \leq 1,$$

missä käytettiin normin ehtoa (N2). Väite seuraa kertomalla viimeinen epäyhtälö puolittain luvulla $\|x\|_p$. Siis $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ ja $\ell^p \subset \ell^q$.

Osoitetaan vielä vastaoletuksen kautta, että jos $p \in (1, \infty)$, niin $\ell^p \subset c_0$; tietystikään ei päde $\ell^\infty \subset c_0$. Mikäli jono (x_n) ei suppene nollaan, niin on olemassa $\epsilon > 0$ ja ääretön indeksijoukko $I \subset \mathbb{N}$, siten että $|x_k| > \epsilon$ kun $k \in I$. Tällöin

$$\|x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \geq \sum_{k \in I} \epsilon^p = \infty,$$

joten x ei voi kuulua avaruuteen ℓ^p millään $1 \leq p < \infty$.

3. Jos $f \in C(0,1)$, asetetaan

$$Tf(x) = \int_0^1 \sqrt{x}\, f(t^2)\, dt, \qquad x \in [0,1].$$

Osoita, että T on hyvin määritelty ja jatkuva (eli rajoitettu) lineaarinen kuvaus $T : C(0,1) \to C(0,1)$. Määrää T:n normi $\|T\|$.

RATKAISU 3: Huomataan aluksi että $Tf(x) = \sqrt{x} c_f$, missä

$$c_f = \int_0^1 f(t^2) dt.$$

Koska $t \mapsto f(t^2)$ on jatkuva (ja rajoitettu) suljetulla välillä $[0,1]$, on selvää että c_f on hyvin määritelty ja äärellinen luku. Neliöjuurifunktio on jatkuva, joten niin on myös Tf kaikilla $f \in C(0,1)$. Siten T on hyvin määritelty kuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$. Lineaarisuus seuraa helposti integraalin lineaarisuudesta; jos $f, g \in C(0,1)$ ja $a, b \in \mathbb{K}$, niin

$$\begin{aligned} T(af + bg)(x) &= \sqrt{x} \int_0^1 (af + bg)(t^2) dt \\ &= a\sqrt{x} \int_0^1 f(t^2) dt + b\sqrt{x} \int_0^1 g(t^2) dt \\ &= aTf(x) + bTg(x). \end{aligned}$$

Olkoon f avaruuden $C(0,1)$ yksikkövektori. Koska $t^2 \in [0,1]$ aina kun $t \in [0,1]$, nähdään helposti että $|f(t^2)| \leq \|f\|_\infty = 1$ kaikilla $t \in [0,1]$. Nyt

$$|Tf(x)| = |\sqrt{x}|| \int_0^1 f(t^2) dt| \leq \sqrt{x} \|f\|_\infty = \sqrt{x} \leq 1,$$

joten nähdään, että $\|T\| \leq 1$ (jolloin tietysti T on rajoitettu). Ottamalla $f(t) \equiv 1$, saadaan $Tf(x) = \sqrt{x}$, jolloin $\|Tf\|_\infty = 1$. Siis $\|T\| \geq \|Tf\|_\infty = 1$. On osoitettu että $\|T\| = 1$.

4. Määrää jatkuvuusmoduli funktioille $f(x) = x^2$ ja $g(x) = \sqrt{x}\,, \quad x \in [0,1]$. [vrt. Luentomuistiinpanot s. 28]

RATKAISU 4: Laskemalla derivaatta $f'(x) = 2x$, saadaan väliarvolausetta käyttämällä

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_\infty |x - y| = 2|x - y|.$$

Nähdään, että $w_f(t) = 2t$ on f:n jatkuvuusmoduli. Huomaa, että Lipschitz-funktiolla h on aina muotoa $t \mapsto Lt$ oleva jatkuvuusmoduli, missä L on h:n Lipschitz-vakio.

Osoitetaan, että $w_g(t) = \sqrt{t}$ on funktion g jatkuvuusmoduli. Olkoon siis $x, y \in [0,1]$ ja oletetaan että $x \geq y$. Tällöin $2y \leq 2\sqrt{x}\sqrt{y}$, joten

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq x - y.$$

Ottamalla puolittain neliöjuuri, saadaan

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y},$$

eli

$$|g(x) - g(y)| \leq w_g(|x - y|).$$

Sama argumentti toimii myös kun $y \geq x$, joten $w_g(t) = \sqrt{t}$ on g:n jatkuvuusmoduli.

5. Kun $1 \leq p \leq \infty$ ja $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^p$, asetamme

$$Tx = T(x_k)_{k=1}^\infty := \Big(\frac{1}{k} x_k\Big)_{k=1}^\infty = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots).$$

Selvitä millä indeksin $1 \leq p \leq \infty$ arvoilla T määrää jatkuvan lineaarikuvauksen

$$T : \ell^p \to \ell^1.$$

[Vihje: Tapaus $p = 2$ on selvitetty luentomuistiinpanoissa.]

RATKAISU 5: Jos $x = (x_k)$ ja $y = (y_k)$ ovat kaksi mielivaltaista jonoa (ottamatta kantaa siihen, kuuluvatko ne mahdollisesti jonoavaruuteen ℓ^p) ja $a, b \in \mathbb{K}$, niin

$$\begin{aligned} T(ax + by) &= \Big(\frac{1}{k}(ax_k + by_k)\Big) \\ &= a\Big(\frac{1}{k}x_k\Big) + b\Big(\frac{1}{k}x_k\Big) \\ &= aTx + bTy, \end{aligned}$$

mikä osoittaa lineaarisuuden.

Muistetaan, että $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha < \infty$ jos ja vain jos $\alpha > 1$. Jos nyt $1 < p < \infty$ ja $x \in \ell^p$, niin Hölderin epäyhtälöä käyttämällä saadaan

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}|x_k| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^q)^{1/q}\|x\|_p,$$

missä $1/p + 1/q = 1$, jolloin $q > 1$. Siis nähdään että T on rajoitettu $\ell^p \to \ell^1$.

Jos taas $x \in \ell^1$, niin

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}|x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|_1,$$

joten $T : \ell^1 \to \ell^1$ on rajoitettu.

Olkoon $x = (1, 1, 1, ...) \in \ell^\infty$. Tällöin

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty.$$

Siis nähdään, ettei $T : \ell^\infty \to \ell^1$ ole rajoitettu.