Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 12 ratkaisuja (AP)
2.5.2012

1. Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ jono. Sanotaan, että (x_n) suppenee *heikosti* avaruudessa E kohti vektoria $x \in E$, jos $x^*(x) = \lim_n x^*(x_n)$ kaikilla $x^* \in E^*$. (Merkintä: $x_n \xrightarrow{w} x$ kun $n \to \infty$).

Tutki, suppeneeko jono (e_n) heikosti avaruuksissa c_0 tai ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, kun $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ ja $n \in \mathbb{N}$ (ykkönen n:ssä paikassa).

RATKAISU 1: Tapaus c_0. Muistetaan edellisistä harjoituksista että $c_0^* = \ell^1$, siis jos $x^* \in c_0^*$, niin on olemassa jono $x = (x_n) \in \ell^1$ siten että

$$x^*(y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_n x_n,$$

kaikilla $y = (y_n) \in c_0$. Koska $x \in \ell^1 \subset c_0$, niin $x^*(e_n) = x_n \to 0$ kun $n \to \infty$. Siis (e_n) suppenee heikosti nollaan avaruudessa c_0.

Tapaus ℓ^p kun $1 < p < \infty$. Toimitaan kuten edellä mutta nyt funktionaalia $x^* \in (\ell^p)^*$ vastaa jono $x = (x_n) \in \ell^q$, missä $1/p + 1/q = 1$. Koska $x \in \ell^q \subset c_0$, niin nähdään että $x^*(e_n) = x_n \to 0$, joten $e_n \xrightarrow{w} 0$.

Tapaus ℓ^1. Muistetaan että $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ ja duaalipari rakentuu kuten edellisissä kohdissa. Olkoon nyt $y_n = (-1)^n$ ja tarkastellaan jonoa $y = (y_n) \in \ell^\infty$. Olkoon y^* tämän jonon generoima funktionaali, jolloin $y^*(e_n) = y_n = (-1)^n$, mistä nähdään, ettei (e_n) suppene heikosti avaruudessa ℓ^1.

2. Olkoon $0 < p < 1$. Anna esimerkki aliavaruudesta $M \subset L^p(0,1)$ ja jatkuvasta, nollasta eroavasta funktionaalista $T : M \to \mathbb{K}$.

Tehtävän opetus on se ettei Hahn-Banachin lause toimi L^p-avaruuksille kun $0 < p < 1$.

RATKAISU 2: Otetaan tarkasteluun vakiofunktioiden avaruus M, joka on selvästi avaruuden $L^p(0,1)$ aliavaruus. Jos $f \equiv a \in \mathbb{K}$, niin asetamme $Tf = a$. Jos nyt $f \equiv a$ ja $g \equiv b$, niin $\|f-g\|_p = |a-b|^p$ ja $|Tf-Tg| = |a-b|$. Välittömästi nähdään että $T : M \to \mathbb{K}$ on jatkuva.

Jos Hahn-Banachin lause toimisi tehtävän avaruudelle, niin T olisi jatkettavissa duaalin $L^p(0,1)$ alkioksi T^*. Edellisten harjoitusten perusteella $T^* =$

0, mikä olisi ristiriita sillä jos esimerkiksi $f \equiv 1$, niin $T^*f = Tf = 1$. Havaitsemme ettei Hahn-Banachin lause toimi tehtävän tapauksessa.

3. Luennoilta tiedämme, että duaalin alkiota $x^* \in L^p(-1,1)^*$ vastaa yksikäsitteinen funktio $g \in L^q(-1,1)$, $1/p + 1/q = 1$, jolle

$$\langle f, x^* \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Osoita että $x^* \in L^p(-1,1)^*$ ja määrää edellämainittu funktio $g \in L^q(-1,1)$ kun

(i) $\langle f, x^* \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 f(|x|)dx$;

(ii) $\langle f, x^* \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 f(|x|)dx$.

RATKAISU 3: (i) Hölderin epäyhtälöllä nähdään että

$$|\langle f, x^* \rangle| = |\int_{-1}^{1} x^2 f(|x|)dx| \leq \|f\|^p \left(\int_{-1}^{1} x^{2q} dx \right)^{1/q} \leq 2^{1/q} \|f\|_p,$$

joten $x^* \in L^p(-1,1)^*$.

Lasketaan nyt

$$\begin{aligned}
\langle f, x^* \rangle &= \int_{-1}^{1} x^2 f(|x|)dx \\
&= \int_{-1}^{0} x^2 f(-x)dx + \int_{0}^{1} x^2 f(x)dx \\
&= \int_{0}^{1} (-x)^2 f(x)dx + \int_{0}^{1} x^2 f(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x) 2x^2 \chi_{[0,1]}(x)dx,
\end{aligned}$$

missä käytimme muuttujanvaihtoa. Siis voidaan asettaa $g(x) = 2x^2\chi_{[0,1]}(x)$ ja selvästi $g \in L^q(-1,1)$. Itseasiassa pätee myös $\|g\|_q = \|x^*\|$, mistä saadaan $\|x^*\| = 2(2q+1)^{1/q}$.

(ii) Voidaan toimia kuten kohdassa (i) tai sitten havaita suoraan että $x^3 f(|x|)$ on pariton funktio, jolloin nähdään että $x^*(f) = 0$ kaikilla $f \in L^p(-1,1)$. Siten $x^* = 0 \in L^p(-1,1)^*$ ja vastaava funktio g on nollafunktio.

4. Olkoon $g \in C(0,1)$ kiinnitetty jatkuva funktio $[0,1] \to \mathbb{R}$. Tutki Arzela-Ascolin lauseen avulla onko joukko $\{g_s : 0 \leq s \leq 1\}$ relatiivisesti kompakti avaruudessa $C(0,1)$, kun

$$g_s(t) = g(st), \quad t \in [0,1] \text{ ja } s \in [0,1].$$

[*Vihje:* funktion g tasaisesta jatkuvuudesta on hyötyä.]

RATKAISU 4: Haluamme osoittaa että tehtävän perhe on pisteittäin rajoitettu ja yhtäjatkuva. Koska $|g_s(t)| = |g(st)| \leq \|g\|_\infty$, niin näemme että perhe on itseasiassa tasaisesti rajoitettu.

Koska g on tasaisesti jatkuva joukossa $[0,1]$, niin kaikilla $\epsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$ siten että $|g(t) - g(t')| < \epsilon$ aina kun $|t - t'| < \delta$. Olkoon siis $t' \in [0,1]$ annettu ja $|t - t'| < \delta$. Tällöin $|st - st'| = |s||t - t'| < \delta$, joten

$$|g_s(t) - g_s(t')| = |g(st) - g(st')| < \epsilon.$$

Siis perhe on yhtäjatkuva ja nyt voimme käyttää Arzela-Ascolin lausetta relatiivisen kompaktiuden toteamiseen.

5. Olkoot E, F Banachin avaruuksia. Muistetaan että $T : E \to F$ on kompakti, jos joukon $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ kuva $T(B_E)$ on relatiivisesti kompakti F:ssä. Osoita että seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(1) T on kompakti;

(2) $T(U) \subset F$ on relatiivisesti kompakti kaikilla rajoitetuilla $U \subset E$;

(3) Jokaisella rajoitetulla jonolla $(x_n) \subset E$ on olemassa osajono (x_{n_k}), siten että jono (Tx_{n_k}) suppenee F:ssä.

RATKAISU 5: Osoitetaan että (1) $\Rightarrow$ (2). Olkoon siis U mielivaltainen rajoitettu joukko, jolloin löytyy $\lambda > 0$ siten että $U \subset \lambda B_E$. Tällöin $T(U) \subset T(\lambda B_E) = \lambda T(B_E)$, joten $\overline{T(U)} \subset \lambda \overline{T(B_E)}$, mistä nähdään että $\overline{T(U)}$ on kompaktin joukon täydellisenä osajoukkona kompakti. Siis $T(U)$ on relatiivisesti kompakti.

Selvästi (2) $\Rightarrow$ (1), joten on osoitettu että (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Osoitetaan että (2) $\Rightarrow$ (3). Olkoon siis (x_n) rajoitettu jono E:ssä. Tällöin $(x_n) \subset U$ jollain rajoitetulla joukolla U. Siten $(Tx_n) \subset \overline{T(U)}$ on jono kompaktissa joukossa. Tällöin tiedämme että jonolla (Tx_n) on F:ssä suppeneva osajono. Toisin sanoen, on olemassa osajono (x_{n_k}), jolle $Tx_{n_k} \to y \in F$.

Osoitetaan vielä että (3) $\Rightarrow$ (2), jolloin tehtävä on ratkaistu täysin. Olkoon siis $U \subset E$ rajoitettu joukko. Haluamme osoittaa että $\overline{T(U)}$ on kompakti, joten olkoon $(y_n) \in \overline{T(U)}$ jono. Jokaiselle n, voidaan löytää $z_n \in T(U)$ siten että $\|z_n - y_n\| < 1/n$ ja $x_n \in U$ siten että $Tx_n = z_n$. Nyt $(x_n) \subset U$ on rajoitettu jono, joten löytyy osajono (x_{n_k}) siten että $T(x_{n_k}) = z_{n_k} \to y \in \overline{T(U)}$. Muodostetaan nyt osajono (y_{n_k}), jolloin $\|y_{n_k} - y\| \leq \|y_{n_k} - z_{n_k}\| + \|z_{n_k} - y\| \to 0$. Siten jonolle (y_n) on löydetty suppeneva osajono, jolloin siis $\overline{T(U)}$ on kompakti ja siten $T(U)$ on relatiivisesti kompakti.