Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 11 ratkaisuja (AP)
25.4.2012

1. Olkoon $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ välin $[0,1]$ kaikki rationaalipisteet. Asetetaan

$$x^*(f) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{-k} f(q_k), \quad \text{kun } f \in C(0,1),$$

Näytä, että $x^* \in C(0,1)^*$ ja laske normi $\|x^*\|$.

RATKAISU 1: Olkoon f yksikkövektori avaruudessa $C(0,1)$. Tällöin

$$|x^*(f)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Siis $x^* \in C(0,1)^*$ ja $\|x^*\| \leq 1$.

Olkoon f_n sellainen $C(0,1)$:n yksikkövektori, jolle $f(q_k) = (-1)^k$ kun $k \leq n$. Tällaisen funktion voi aina muodostaa yhdistelemällä pisteitä (huomaa, että f_n:n arvot joukon $\{q_1, ..., q_n\}$ ulkopuolella voivat olla mitä vain, kunhan f_n pysyy $C(0,1)$:n yksikkövektorina).

Nyt pätee

$$|x^*(f_n)| \geq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \to 1,$$

kun $n \to \infty$. Siten $\|x^*\| = 1$.

2. Asetetaan

$$\phi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\, dt - \int_{1/2}^{1} f(t)\, dt, \quad f \in C(0,1).$$

(i) Näytä, että $\phi \in C(0,1)^*$ ja laske normi $\|\phi\|$.
(ii) Onko olemassa sellaista funktiota $f \in C(0,1)$, jolle $\|f\|_\infty = 1$ ja $|\phi(f)| = \|\phi\|$?

RATKAISU 2: (i) Selvästi kaikilla $f \in C(0,1)$ pätee

$$|\phi(f)| \leq \int_0^{1/2} \|f\|_\infty dt + \int_{1/2}^{1} \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty,$$

joten $\phi \in C(0,1)^*$ ja $\|\phi\| \leq 1$.

Määritellään kaikilla $n > 2$ funktio f_n siten että $f_n(t) = 1$ kun $t \leq 1/2 - 1/n$, $f_n(t) = -1$, kun $t \geq 1/2 + 1/n$ ja välillä $[1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n]$ funktio f_n määritellään, niin että siitä tulee $C(0,1)$:n yksikkövektori (mieti millainen tämän funktion kuvaaja olisi). Tällöin

$$|\phi(f)| \geq (1/2 - 1/n) - 2/n + (1/2 - 1/n) \to 1,$$

mistä nähdään että $\|\phi\| = 1$.

(ii) Jos yksikkövektori $f \in C(0,1)$ tuottaisi $|\phi(f)| = 1$, niin ensinnäkin koska

$$1 = |\phi(f)| \leq \int_0^{1/2} |f(t)|dt + \int_{1/2}^1 |f(t)|dt,$$

niin nähdään että $|f(t)| = 1$ pitäisi toteutua kaikilla $t \in [0,1]$.

Toisaalta, nähdään että myös pitäisi olla

$$|\int_0^{1/2} f(t)dt| = 1/2 = |\int_{1/2}^1 f(t)dt|,$$

mikä voi toteutua vain jos f on vakio väleillä $[0,1/2]$ ja $[1/2,1]$, jolloin ainoa jatkuva mahdollisuus olisi vakiofunktio. Mutta on helppo nähdä, että vakiofunktiolle f pätee $\phi(f) = 0$. Siten ei löydy funktionaalin maksimoivaa vektoria.

3. Näytä, että duaaliavaruus $c_0^* = \ell^1$. [*Vihje:* Vrt. Esimerkki 9.3 ja HT 10:4.]

RATKAISU 3: Kun $x = (x_n) \in c_0$, niin merkitään $s_n(x) = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, jolloin $s_n(x) \to x$ avaruudessa c_0. Olkoon $x^* \in c_0^*$, jolloin jatkuvuudesta seuraa

$$x^*(x) = \lim_{n\to\infty} x^*(s_n(x)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n x_j x^*(e_j) = \sum_{j=1}^\infty x_j y_j,$$

missä $y_j = x^*(e_j)$.

Olkoon nyt $\alpha_k = |y_k|/y_k$ kun $y_k \neq 0$ ja $\alpha_k = 0$ muuten ja asetetaan $x_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$, jolloin $x_n \in c_0$. Nyt kaikilla n pätee

$$\|x^*\| \geq |x^*(x_n)| = \sum_{j=1}^n |y_j|,$$

mistä nähdään että $y = (y_n) \in \ell^1$ ja $\|y\|_1 \leq \|x^*\|$.

Merkitään siis $T : c_0^* \to \ell^1$, $Tx^* = (x^*(e_k))$, jolloin saadaan lineaarinen ja jatkuva kuvaus. Jos $Tx^* = 0$, niin $x^*(e_k) = 0$ kaikilla k, joten $x^*(s_n(x)) = 0$ kaikilla $x \in c_0$ ja jatkuvuudesta seuraa tällöin että $x^* = 0$. Siten T on injektio.

Toisaalta, selvästi (esim. käyttämällä Hölderin epäyhtälöä) jos $y = (y_n) \in \ell^1$, niin kuvaus

$$\Lambda_y : x \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

on jatkuva $c_0 \to \mathbb{K}$ ja $\|\Lambda_y\| \leq \|y\|_1$. Määritellään kuvaus $S : \ell^1 \to c_0^*$, $Sy = \Lambda_y$, jolloin saadaan jatkuva lineaarikuvaus, jolle $\|S\| \leq 1$. Helposti nähdään, että $TSy = y$, erityisesti siis T on surjektio. Siten T on osoitettu kääntyväksi ja S on tällöin sen käänteiskuvaus.

Lopuksi huomataan vielä että jos $x^* \in c_0^*$ ja $y = Tx^*$, niin

$$\|x^*\| = \|Sy\| \leq \|y\|_1 = \|Tx^*\|_1 \leq \|x^*\|,$$

mistä saadaan $\|Tx^*\|_1 = \|x^*\|$, eli T on isometrinen isomorfismi $c_0^* \to \ell^1$.

4. Olkoon $\tau : \ell^\infty \to \ell^\infty$ siirto, eli $\tau : (x_1, x_2, \dots) \to (x_2, x_3, \dots)$. Osoita, että Banachin raja $x^* : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ (vrt. esim. 9.17 muistiinpanoissa) voidaan rakentaa niin että $x^*(\tau x) = x^*(x)$ jokaisella $x \in \ell^\infty$.

[*Vihje:* Sovella Hahn-Banachin lausetta lineaarikuvaukseen $x^*(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$ kun $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c$, ja seminormiin $p(x) := \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right|$.]

RATKAISU 4: Tarkastellaan avaruutta $d \subset \ell^\infty$, joka koostuu niistä alkioista $x = (x_n)$, joille "keskiarvo"

$$k(x) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

on olemassa. Nyt $c \subset d \subset \ell^\infty$, missä inkluusiot ovat aitoja ja ensimmäisen inkluusioista todistamme kohta. Selvästi k on lineaarinen avaruudessa d, ja toteuttaa estimaatin $|k(x)| \leq \|x\|_\infty$, kun $x \in d$.

Tehdään ensin havainto $c \subset d$. Olkoon siis $x \in c$ ja $x_n \to a$ ja $\epsilon > 0$. On olemassa N siten että $|x_n - a| < \epsilon/2$ kunhan $n > N$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|n^{-1}\sum_{j=1}^{n} x_j - a| &= |n^{-1}((\sum_{j=1}^{n} x_j) - na)| \\
&= |n^{-1}(\sum_{j=1}^{n}(x_j - a))| \\
&\le n^{-1}\sum_{j=1}^{n}|x_j - a| \\
&= \sum_{j=1}^{N}|x_j - a| + n^{-1}\sum_{j=N+1}^{n}|x_j - a| \\
&\le \frac{2N\|x\|_\infty}{n} + \frac{(n-N-1)\epsilon}{2n} < \epsilon,
\end{aligned}$$

kun $n > 4N\|f\|_\infty/\epsilon$. Siis, jos $x_n \to a$, niin $k(x) = a$. Siis k yleistää raja-arvon käsitteen.

Laajennetaan nyt k Hahn-Banachin lauseen avulla koko avaruuteen ℓ^∞. Merkitään saatua funktionaalia K:lla. Jos voimme osoittaa, että $K(x) = K(\tau x)$, niin olemme löytäneet halutun Banachin rajan. Huomataan ensin että $x - \tau x \in d$;

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{n} x_j - x_{j+1} = n^{-1}(x_1 - x_{n+1}) \to 0.$$

Siis $x - \tau x \in d$ ja $k(x - \tau x) = 0$.

Lasketaan nyt $K(x) - K(\tau x) = K(x - \tau x) = k(x - \tau x) = 0$, siis $K(x) = K(\tau x)$ ja siten haluttu funktionaali on löytynyt: $K = x^*$.

5. Olkoon $0 < p < 1$. Määritellään avaruus $L^p(0,1)$ niiden mitallisten funktioiden joukkona, joille

$$\|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty.$$

Suure $\|\cdot\|_p$ ei ole normi (se on itseasiassa metriikka), mutta voimme silti määritellä Cauchy-jonot ja suppenemisen kuten tehtiin kun $p \ge 1$; erityisesti siis $f_n \to f$ jos $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Nollafunktionaali kuuluu selväsi avaruuden $L^p(0,1)$ duaaliin. Osoita, ettei duaalissa $(L^p(0,1))^*$ ole muita alkioita !

[*Vihje:* Jos $0 \neq T : L^p(0,1) \to \mathbb{R}$ on lineaarinen, valitse $f \in L^p$, jolle $T(f) \geq 1$.

Voit olettaa tunnetuksi, että $t \mapsto \int_0^t |f(x)|^p dx$ on jatkuva. Löytyy siis $0 < t < 1$ jolle $\|f\chi_{[0,t]}\|_p = \|f\chi_{[t,1]}\|_p = \frac{1}{2}\|f\|_p$, ja lineaarisuuden nojalla joko $T(f\chi_{[0,t]}) \geq \frac{1}{2}$ tai $T(f\chi_{[t,0]}) \geq \frac{1}{2}$. Oletetaan ensimmäinen tapaus, ja merkitään $f_1 = 2f\chi_{[0,t]}$.

Tee ylläoleva operaatio sitten f_1 :lle jne. Saat jonon funktioita f_n joille $T(f_n) \geq 1$ mutta $\|f_n\|_p \leq 2^{n(p-1)}\|f\|_p$; päättele ettei T ole jatkuva origossa.]

RATKAISU 5: Olkoon T nollasta eroava funktionaali, jolloin voidaan löytää funktio $f \in L^p(0,1)$ siten että $T(f) \geq 1$. Tarkastellaan välillä $[0,1]$ kuvausta

$$t \mapsto \int_0^t |f(x)|^p dx.$$

Huomaa, että $f^p \in L^1$, joten edellämainittu kuvaus on jatkuva absoluuttisen jatkuvuuden perusteella (katso Holopainen: Reaalianalyysi I, seuraus 2.7). Siten, on olemassa $t_0 \in [0,1]$ siten että jos asetetaan $g = f\chi_{[0,t_0]}$ ja $h = f\chi_{[t_0,1]}$, niin $\|g\|_p = \|h\|_p = \frac{1}{2}\|f\|_p$. Koska $f = g + h$, niin $T(f) = T(g) + T(h) \geq 1$, joten joko $T(g) \geq 1/2$ tai $T(h) \geq 1/2$; oletetaan vaikka että $T(g) \geq 1/2$. Asetetaan $f_1 = 2g$, jolloin

$$\|f_1\|_p = \int_0^1 2^p |g(x)|^p dx = 2^{p-1}\|f\|_p$$

ja $T(f_1) \geq 1$.

Toistetaan nyt ylläoleva tarkastelu funktiolle f_1 ja saadaan funktio f_2, jolle $T(f_2) \geq 1$ ja $\|f_2\|_p \leq 2^{2(p-1)}\|f\|_p$. Yleisesti, löydetään funktiot f_n siten että $T(f_n) \geq 1$ ja $\|f_n\|_p \leq 2^{n(p-1)}\|f\|_p$. Koska $p - 1 < 0$, niin nähdään että $f_n \to 0$, mistä huomataan ettei T ole jatkuva nollassa.