Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 10 ratkaisuja (AP)
18.4.2012

1. Olkoot $A = \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ ja $B = \{-e_n + \frac{1}{n}e_1 : n \in \mathbf{N}\}$, missä e_n, $n \in \mathbb{N}$, ovat avaruuden ℓ^1 luonnolliset kantavektorit.

Osoita, että A ja B ovat suljettuja ja rajoitettuja ℓ^1:ssä, mutta summajoukko $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ei ole suljettu.

RATKAISU 1: Koska jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pätee $\|e_n\|_1 = 1$ ja $\|-e_n+\frac{1}{n}e_1\|_1 \leq 2$, niin A ja B ovat molemmat rajoitettuja. Selvästi, koska $\|e_n - e_k\|_1 = 2$, jos $n \neq k$, nähdään että A on suljettu (sillä Cauchy-jonot ovat tällöin vakioita sopivan indeksin jälkeen, joten ne suppenevat). Samoin,

$$\| - e_n + \frac{1}{n}e_1 - e_k + \frac{1}{n}e_1\|_1 \geq 1$$

jos $n \neq k$, joten myös B on suljettu.

Joukko $A + B$ sisältää pisteet $x_n = e_n + (-e_n + \frac{1}{n}e_1) = \frac{1}{n}e_1$, joten nollavektori kuuluu sen sulkeumaan; $x_n \to 0$. Kuitenkaan nollavektori ei kuulu joukkoon $A + B$, sillä $e_k - e_n + \frac{1}{n}e_1 \neq 0$. Siten $A + B$ ei voi olla suljettu.

2. Olkoon E Banach-avaruus, kerroinkuntana $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Jos $T : E \to \mathbb{K}$ nollasta eroava jatkuva lineaarikuvaus, osoita suoraan (ilman avoimen kuvauksen lausetta) että T on avoin.

RATKAISU 2: Olkoon $r > 0$ ja tarkastellaan kuvajoukkoa $T(B(0, r)) \subset \mathbb{K}$. Koska $T \neq 0$, niin on olemassa piste $x \in B(0, r)$, jolle $Tx \neq 0$, siis $|Tx| = r' > 0$. Tarkastellaan nyt joukkoa $U_x = \{\lambda x : |\lambda| < 1\}$, jolloin $U_x \subset B(0, r)$. Olkoon nyt $y \in \mathbb{K}$ sellainen että $|y| < r'$. Asetetaan $\lambda_y = y/Tx$, jolloin $|\lambda_y| < 1$. Nyt, $T(\lambda_y x) = y$, joten $y \in T(U_x)$. Saadaan $B(0, r') \subset T(B(0, r))$ ja lauseen 8.5 mukaan T on silloin avoin.

3. Anna esimerkki *epäjatkuvasta* funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka kuvaaja $G(f) = \{ (x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ on suljettu $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

RATKAISU 3: Tarkastellaan funktiota $f(x) = 1/x$, kun $x \neq 0$ ja $f(0) = 0$. Tämä on tunnetusti epäjatkuva. Lisäksi $G(f) = F^{-1}\{1\} \cup \{0\}$, kun

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus $F(x, y) = xy$, joten nähdään että $G(f)$ on suljettu.

4. Olkoon E Hilbertin avaruus ja $(x_n) \subset E$ jono, jolle $\sum_{n=1}^{\infty} |(x|x_n)|^2 < \infty$ kaikilla $x \in E$. Näytä suljetun kuvaajan lauseen avulla että $T : E \to \ell^2$ on jatkuva lineaarikuvaus, kun asetetaan

$$Tx = ((x|x_n))_{n \in \mathbf{N}}, \quad x \in E.$$

RATKAISU 4: Olkoon $(y(n))$ jono E:ssä siten että $y(n) \to 0$ ja oletetaan että $Ty(n) \to y \in \ell^2$. Koska $Ty(n) \to y$, niin erityisesti $Ty(n)_k \to y_k$ kaikilla k, eli $(y(n)|x_k) \to y_k$. Mutta jos $y(n) \to 0$, niin $(y(n)|x_k) \to 0$, mikä antaa $y = 0$. Suljetun kuvaajan lauseen nojalla T on tällöin jatkuva.

5. Luennolla todistimme suljetun kuvaajan lauseen käyttämällä apuna avoimen kuvauksen lausetta.

Todista, että olisimme voineet toimia myös kääntäen, so. todista suljetun kuvaajan lauseen avulla: Jos E ja F ovat Banach avaruuksia, jokainen surjektiivinen $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on avoin kuvaus.

Voit halutessasi olettaa, että $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on bijektio.

[*Vihje yleiseen tapaukseen:* Muodosta tekijäavaruus $E/Ker(T)$, vrt. HT 4/Teht. 4, ja tarkastele (bijektiota) $T : E/Ker(T) \to F$.]

RATKAISU 5: Koska T on jatkuva, niin $N = Ker(T) \subset E$ on suljettu. Siten E/N on Banach-avaruus (harjoitusten 4, tehtävän 4 nojalla). Tarkastellaan kuvausta $S : E/N \to F$, $S(x + N) = Tx$.

Selvästi S on surjektio ja lisäksi $S(x + N) = Tx = 0$ täsmälleen silloin kun $x \in N$, jolloin $x + N = 0 + N$, joten S on injektio.

Jos $x + N \in E/N$, niin on olemassa $k \in N$ siten että $\|x + k\| \leq 2\|x + N\|$. Näin ollen

$$\|S(x + N)\| = \|Tx\| = \|T(x + k)\| \leq \|T\|\|x + k\| \leq 2\|T\|\|x + N\|,$$

joten S on jatkuva.

Tarkastellaan nyt käänteiskuvausta $G : F \to E/N$, joka määritellään kaavalla $G(y) = x + N$, missä $x + N$ on se yksikäsitteinen piste avaruudesta E/N, jolle $S(x + N) = y$. Jos nyt $G(y) = x + N$, $G(y') = x' + N$ ja

$a, b \in \mathbb{K}$, niin pätee $S(a(x+N)+b(x'+N)) = ay+by'$. Siten $G(ay+by') = a(x+N)+b(x'+N) = aG(y)+bG(y')$, mistä nähdään että G on lineaarinen.

Oletetaan nyt että $y_n \to 0$ ja että $G(y_n) \to z+N \in E/N$. Koska S on jatkuva, niin $SG(y_n) = y_n \to S(z+N)$. Raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $S(z+N) = 0$, ja koska S on injektio, niin $z+N = 0+N$. Suljetun kuvaajan lauseen nojalla G on jatkuva.

Olkoon $r > 0$ annettu. Koska G on jatkuva, niin on olemassa $r' > 0$ siten että $G(B(0,r')) \subset B(0,r) \subset E/N$. Olkoon nyt $y \in B(0,r')$, jolloin $\|G(y)\| = \|x+N\| < r$, missä $Tx = y$. Mutta jos $\|x+N\| < r$, niin on olemassa $k \in N$, siten että $\|x+k\| < r$. Tällöin $x+k \in B(0,r)$ ja $T(x+k) = Tx = y$. On osoitettu että $B(0,r') \subset T(B(0,r))$ ja lauseen 8.5 mukaan T on tällöin avoin.

Mieti (jos et vielä ole miettinyt) miten tilanne yksinkertaistuu jos T on bijektio.