Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 1 ratkaisuja (AP)
25.1.2012

1. a) Olkoon $B(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \text{ rajoitettu kuvaus}\}$, varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty$. Osoita että $C(0,1)$ on $B(0,1)$:n suljettu vektorialiavaruus.

b) Näytä, että jonoavaruus c_0 on l^∞:n suljettu vektorialiavaruus.

RATKAISU 1: (a) Selvästi $C(0,1)$ on vektoriavaruus; jos f ja g ovat jatkuvia, niin silloin on myös $f+g$, vastaavasti havaitaan että jos $a \in \mathbb{K}$, niin af on jatkuva. Koska lisäksi on tunnettua että jatkuvat funktiot ovat rajoitettuja suljetulla välillä $[0,1]$, nähdään että $C(0,1)$ on $B(0,1)$:n aliavaruus.

Olkoon nyt (f_n) jono $C(0,1)$:ssä, joka suppenee sup-normissa kohti avaruuden $B(0,1)$ alkiota f. On osoitettava, että f on jatkuva. Olkoon siis $t \in [0,1]$ mielivaltainen ja kiinnitetään $\epsilon > 0$. Olkoon n_ϵ sellainen luku, että $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon/3$, kunhan $n > n_\epsilon$. Kiinnitetään jokin $N > n_\epsilon$. Funktio f_N on jatkuva pisteessä t, joten on olemassa $\delta > 0$ siten että $|f_N(t) - f_N(t')| < \epsilon/3$, kun $t' \in B(t,\delta) \cap [0,1]$. Mutta jos δ ja t' on valittu näin, niin

$$\begin{aligned}|f(t) - f(t')| &\le |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t')| + |f_N(t') - f(t')| \\ &\le \|f - f_N\|_\infty + |f_N(t) - f_N(t')| + \|f_N - f\|_\infty < \epsilon.\end{aligned}$$

Näin on osoitettu että f on jatkuva.

(b) Varmistetaan ensin että c_0 on ℓ^∞:n aliavaruus. Jos $(x_n) \in c_0$, niin on olemassa $M \in \mathbb{N}$ siten että $|x_n| < 1$ kun $n > M$. Tällöin $\|(x_n)\|_\infty \le 1 + \max_{1\le j\le M} |x_j| < \infty$, siis $c_0 \subset \ell^\infty$. Jonon raja-arvo on lineaarinen, joten on selvää että c_0 on vektoriavaruus.

Osoitetaan, että $\ell^\infty \setminus c_0$ on avoin. Olkoon siis $(x_n) \in \ell^\infty \setminus c_0$. Siis, (x_n) on rajoitettu jono, joka ei suppene nollaan. Tämä tarkoittaa, että on olemassa $\epsilon > 0$, siten että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ löytyy indeksi $n_k > k$, jolla $|x_{n_k}| > \epsilon$. Jos nyt jono $(y_n) \in \ell^\infty$ kuuluu jonon (x_n) ympäristöön $B((x_n), \epsilon/2)$, niin $|y_{n_k}| > \epsilon/2$ (samoilla n_k kuin yllä). Mutta tällöin nähdään, ettei (y_n) voi supeta nollaan, siis $B((x_n), \epsilon/2) \subset \ell^\infty \setminus c_0$ ja avoimuus on todistettu.

2. a) Osoita, että

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

määrittelee normin avaruudessa $C(0,1)$. Ovatko $C(0,1)$:n normit $\|f\|_\infty$ ja $\|f\|_1$ ekvivalentteja ?

b) Osoita, että jokaisessa normiavaruudessa E ekvivalentit normit määräävät samat avoimet ja suljetut joukot.

RATKAISU 2: (a) Tarkistetaan toteuttaako $\|\cdot\|_1$ normin ehdot. Huomataan ensin että

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty,$$

joten $\|\cdot\|_1$ on äärellinen. Tavallisesta skalaarien kolmioepäyhtälöstä seuraa, että kaikilla $x \in [0,1]$ ja $f, g \in C(0,1)$ pätee $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Tällöin

$$\begin{aligned}\|f+g\|_1 &= \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leq \int_0^1 (|f(x)| + g(x)|)dx \\ &= \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx = \|f\|_1 + \|g\|_1,\end{aligned}$$

joten (N1) toteutuu. Samoin, jos $a \in \mathbb{K}$, niin

$$\|af\|_1 = \int_0^1 |af(x)|dx = \int_0^1 |a||f(x)|dx = |a| \int_0^1 |f(x)|dx = |a|\|f\|_1,$$

joka osoittaa ehdon (N2). Selvästi, jos $f = 0$, niin $\|f\|_1 = 0$. Oletetaan, että $f \neq 0$, jolloin $|f(t)| > \epsilon > 0$, jollain $t \in [0,1]$. Jatkuvuudesta seuraa että on olemassa väli $[a,b] \subset [0,1]$, jonka kaikille pisteille x pätee $|f(x)| > \epsilon/2$. Mutta nyt

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \geq \int_a^b |f(x)|dx \geq |b-a|\epsilon/2 > 0.$$

Siten myös ehto (N3) toteutuu, joten $\|\cdot\|_1$ on normi.

Normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_\infty$ eivät ole ekvivalentit. Tarkastellaan vaikkapa jonoa $f_n(t) = t^n$. Helposti nähdään että $\|f_n\|_1 = (n+1)^{-1} \to 0$ ja $\|f_n\|_\infty = 1$ kaikilla n. Huomataan, ettei voi olla vakiota $C > 0$, jolle toteutuisi $\|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(b) Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ekvivalentit normit E:ssä. Siis on olemassa positiiviset vakiot C_1 ja C_2, joille

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$$

kaikilla $x \in E$. Merkitään normien $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ kuulia $B_1(x,r)$ ja $B_2(x,r)$. Huomataan, että jos $\|x-y\|_1 < r/C_2$, niin $\|x-y\|_2 < r$, siis $B_1(x, r/C_2) \subset B_2(x,r)$. Samoin, jos $\|x-y\|_2 < rC_1$, niin $\|x-y\|_1 < r$, joten $B_2(x, rC_1) \subset B_1(x,r)$.

Jos nyt $A \subset E$ on $\|\cdot\|_1$-avoin ja $x \in A$, niin on olemassa $r > 0$ siten että $B_1(x,r) \subset A$. Mutta tällöin myös $B_2(x, rC_1) \subset A$, joten A on $\|\cdot\|_2$-avoin. Vastaasti nähdään, että $\|\cdot\|_2$-avoin joukko B on avoin myös normin $\|\cdot\|_1$ suhteen. Siis ekvivalentit normit määräävät samat avoimet (ja siten suljetut) joukot.

3. Olkoon $f_n(x) = n\left(e^{x/n} - 1\right)$ ja $f(x) = x$, kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita, että $f_n \to f$ avaruuden $C(0,1)$ normin mielessä, so. $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, kun $n \to \infty$.

[Vihje: tutki erotusfunktion ääriarvoja tai käytä väliarvolausetta.]

RATKAISU 3: Tarkastellaan funktioiden $f_n - f$ ääriarvoja. Derivointi antaa $D(f_n - f)(x) = e^{x/n} - 1 \geq 0$, mistä havaitaan, että $f_n - f$ on kasvava kaikilla n. Lisäksi $(f_n - f)(0) = 0$, joten $f_n - f$ on ei-negatiivinen, eli $|f_n - f| = f_n - f$. Siten

$$\|f_n - f\|_\infty = (f_n - f)(1) = n(e^{1/n} - 1) - 1.$$

Mutta kirjoittamalla

$$n(e^{1/n} - 1) = \frac{e^{1/n} - e^0}{1/n}$$

huomataan, että $n(e^{1/n} - 1)$ suppenee eksponenttifunktion derivaattaan pisteessä nolla. Siis on osoitettu, että $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

4. Osoita, että c_0 on separoituva.

[Vihje: Osoita että "finiittiset jonot" $c_{00} = \{\, x = (x_j)_{j=1}^\infty : x_j \neq 0$ vain äärellisen monella $j\}$ on separoituva ja tiheä c_0:ssa.]

RATKAISU 4: Pidetään tunnettuna että $\mathbb{K}^n$, oli se sitten $\mathbb{C}^n$ tai $\mathbb{R}^n$, on separoituva kaikilla n (tarkastele sopivia karteesisia tuloja rationaalilukuista). Toisin sanoen kaikilla n on olemassa numeroituva ja tiheä joukko $Q_n \subset \mathbb{K}^n$. Tarkastellaan jonoavaruuksia

$$c^n := \{x \in \ell^\infty : x_k = 0, \text{ kun } k > n\}.$$

Määritellään kuvaukset $i_n : \mathbb{K}^n \to c^n$ kaavalla

$$i_n(x) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...).$$

Selvästi i_n on bijektio. On helppo nähdä, että $\|i_n(x)\|_\infty \leq \|x\|_2$ kaikilla $x \in \mathbb{K}^n$ (katso luentojen esimerkki 2.13). Jos nyt $(x_n) \in c^n$, niin on olemassa yksikäsitteinen $x \in \mathbb{K}^n$, jolle $i_n(x) = (x_n)$. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen ja valitaan $q \in Q_n$ siten että $\|q - x\|_2 < \epsilon$. Tällöin

$$\|i_n(q) - (x_n)\|_\infty = \|i_n(q) - i_n(x)\|_\infty \leq \|q - x\|_2 < \epsilon,$$

joten numeroituva joukko $Q'_n = i_n(Q_n)$ on tiheä c^n:ssä, joka on siis osoitettu separoituvaksi. Merkitään $Q' = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q'_n$, jolloin Q' on numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista, siis itsekin numeroituva. Jos nyt $(x_n) \in c_{00}$, niin $(x_n) \in c^k$ jollain k, joten kaikilla $\epsilon > 0$ löytyy alkio $q' \in Q'_k \subset Q'$, jolle $\|(x_n) - q'\|_\infty < \epsilon$. Siis Q' on tiheä c_{00}:ssa, joka on näin ollen separoituva.

Olkoon nyt $(x_n) \in c_0$. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$, jolle $|x_n| < \epsilon$, kunhan $n > N$. Suora seuraus tästä on, että c_{00} on tiheä c_0:ssa (mieti yksityiskohtia). Lopuksi todetaan, että sulkeuma $\bar{Q}'$ on suljettu ja sisältää c_{00}:n, joten se sisältää myös sulkeuman $\bar{c}_{00} = c_0$. Siis Q' on tiheä avaruudessa c_0, joka on nyt osoitettu separoituvaksi.

5. Osoita, että l^∞ ei ole separoituva.

[Vihje: Tutki esimerkiksi karakterististen funktioiden perhettä $\{\chi_A : A \subset \mathbb{N}\}$, ja päättele kuten lauseessa 1.5. Vaihtoehtoisesti, diagonalisoi.
Voit pitää tunnettuna, että potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$ on ylinumeroituva. Yllä $\chi_A(n) = 1$ jos $n \in A$, ja $\chi_A(n) = 0$, jos $n \notin A$.]

RATKAISU 5: Tehdään kuten vihjeessä. Jokainen $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tuottaa jonon χ_A kuten vihjeessä. Olkoot $A, B \subset \mathbb{N}$ ja $A \neq B$. Tällöin on olemassa $n \in N$, jolle joko $n \in A \setminus B$ tai $n \in B \setminus A$. Tällöin pätee

$$\|\chi_A - \chi_B\|_\infty \geq |\chi_A(n) - \chi_B(n)| = 1.$$

Tästä nähdään, että $B(\chi_A, 1/3) \cap B(\chi_B, 1/3) = \emptyset$. Näin ollen joukot $B(\chi_A, 1/3)$ muodostavat ylinumeroituvan kokoelman ℓ^∞:n avoimia ja erillisiä joukkoja. Lauseen 1.5 nojalla, avaruus ℓ^∞ ei siis voi olla separoituva.