Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 9
4.4.2012

1. Olkoon $1 < p < \infty$ ja operaattori $T : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ annettu kaavalla

$$(Tf)(x) = xf(x), \quad x \in (0,1).$$

Onko $T : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ jatkuva ? Entä onko se injektio ? Onko T kääntyvä ?!

2. Olkoon $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ sellainen annettu reaalilukujen jono, että

$$\text{sarja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee kaikilla jonoilla } (x_k) \in c_0.$$

Näytä, että silloin $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^1$.
[*Vihje*: Argumentoi kuten luennoilla tai muistiinpanojen Esimerkissä 7.7., käyttäen Banach-Steinhausin lausetta.]

3. Olkoot E, F ja G Banach avaruuksia. Kuvaus $A : E \times F \to G$ on *bilineaarinen*, jos kuvaukset $A_1(y) : x \mapsto A(x,y)$ ja $A_2(x) : y \mapsto A(x,y)$ ovat lineaarisia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$.

Osoita, että bilineaarinen kuvaus A on *rajoitettu*, eli

$$\sup\{\|A(x,y)\| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\} < \infty,$$

jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_2(x) : F \to G$ ja $A_1(y) : E \to G$ ovat jatkuvia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$.
[*Taikasana:* Banach-Steinhausin lause, eli tasaisen rajoituksen periaate].

4. Olkoon F Banachin avaruus ja $G := \{T \in \mathcal{L}(F) \text{ kääntyvä (eli isomorfismi)}\}$. Asetetaan kuvaus $\mathcal{A} : G \to G$, $\mathcal{A}(T) = T^{-1}$. Osoita, että kun $\|H\|$ on riittävän pieni,

$$\mathcal{A}(T+H) = \mathcal{A}(T) - T^{-1}HT^{-1} + E(H)$$

missä jäännöstermi $E(H) \in \mathcal{L}(F)$ toteuttaa ehdon $\|E(H)\| \le \mathit{vakio} \cdot \|H\|^2$.
[Tulkinta: Laskusi osoittaa, että kuvaus $\mathcal{A}$ on *derivoituva* jokaisessa avoimen joukon G pisteessä.]

5. (*Osgoodin tasaisen rajoituksen periaate*, 1897) Olkoon $(f_n) \subset C(0,1)$ jono jatkuvia funktioita $[0,1] \to \mathbb{R}$, jotka ovat *pisteittäin rajoitettuja*, eli $M(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |f_n(x)| < \infty$ kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita, että on olemassa avoin väli $(a,b) \subset [0,1]$ ja luku $M < \infty$, siten että $|f_n(x)| \leq M$ kaikilla $x \in (a,b)$ ja $n \in \mathbb{N}$.

[*Vihje.* Imitoi Banach-Steinhausin lauseen todistusta.]