Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 8
28.3.2012

1. Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ trigonometrinen polynomi. Laske konvoluution

$$(f * P)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)P(x-t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)P(t)dt$$

Fourier kertoimet $\left(\widehat{f * P}\right)(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, funktioiden P ja f Fourier kertoimien avulla.

2. Anna esimerkki jatkuvista lineaarisista kuvauksista $S, T \in \mathcal{L}(E)$ (sopivassa Banach avaruudessa E), joille pätee $\|ST\| < \|S\|\|T\|$. Voitko valita $S = T$?

3. Osoita että

$$Tf = \big(f(1/k) \big)_{k \in \mathbb{N}} = \big(f(1), f(1/2), f(1/3), \dots \big)$$

on hyvin määritelty lineaarinen kuvaus $T : C(0,1) \to \ell^\infty$. Näytä, että T on jatkuva ja määrää normi $\|T\|$. Onko T injektio ? Entä onko T surjektio ?

4. Olkoon $1 \le p \le \infty$. Esitä jokin isomorfismi $T : L^p(0,1) \to E$ kun
a) $E = L^p(-2, 2)$, ja b) $E = L^p(0, \infty)$.

[Vihje: Jälkimmäisessä tapauksessa T voisi olla vaikka muotoa $Tf(x) = g(x)f\big(h(x)\big)$ sopivilla funktioilla g ja h.]

5. Jos $f \in L^2(0, 2\pi)$, osoita että

$$T : g \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt \ =: (Tg)(x)$$

määrittelee jatkuvan lineaarisen operaattorin $T : L^2(0, 2\pi) \to L^2(0, 2\pi)$, jonka normi $\|T\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$.

[Vihje: Olkoon $M = \{P \in L^2(0, 2\pi) : P \text{ on trigonometrinen polynomi}\}$. Osoita ensin Tehtävän 1 ja Parsevalin avulla, että T määrää jatkuvan lineaarisen operaattorin $L^2(0, 2\pi)$:n aliavaruudessa M, ja laske normi $\|T_{|_M}\|$. Käytä sitten monisteen jatkolausetta 6.16. Onko M tiheässä $L^2(0, 2\pi)$:ssa ?]