Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 7
21.3.2012

Huom: Alla samaistamme luonnollisella tavalla funktiot $f \in L^2(0,2\pi)$ ja 2π-periodiset funktiot $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

1. a) Jos $f(x)$ jatkuvasti derivoituva 2π-periodinen funktio, osoita että silloin $\widehat{(f')}(n) = in\widehat{f}(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

b) Osoita, että kaikille 2π-periodisille funktioille $f \in C^k(\mathbb{R})$ pätee $|\widehat{f}(n)| \leq C(1+|n|)^{-k}$, $n \in \mathbb{Z}$. Vertaa tulosta HT6/Tehtävän 1 funktion g Fourier-kertoimiin: Päteekö arvio kaikille $f \in C^k(0,2\pi)$?

[Vihje: Jos periodinen funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva, sen derivaatatkin ovat periodisia (miksi?)]

2. Olkoon $f \in L^2(0,2\pi)$ sellainen funktio, että Fourier sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$ suppenee itseisesti.

a) Osoita, että Fourier osasummat suppenevat tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota $g \in C(0,2\pi)$, eli $s_n(f;x) \to g(x)$ tasaisesti välillä $[0,2\pi]$, kun $n \to \infty$.

b) Osoita, että $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in [0,2\pi]$.

3. Olkoon $f(x)$ jatkuvasti derivoituva 2π-periodinen funktio. Osoita, että f:n Fourier sarja suppenee itseisesti.
[Vihje: Hyödynnä Tehtävää 1, ja arvioi sarjaa $\sum |\widehat{f}(n)|$ Cauchy-Schwarzin avulla]

4. Todista, että $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
[Vihje: Sovella Plancherellin kaavaa funktioon $g(x) = x$; vrt. HT 6/Teht.1]

5. (Käänteinen Tehtävälle 1). Oletamme, että $f \in L^2[0,2\pi]$. Jos kaikilla $k \in \mathbb{N}$ löytyy vakio $C = C_k$ jolle

$$|\widehat{f}(n)| \leq C_k(1+|n|)^{-k}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

osoita, että silloin on olemassa funktio $g \in C^\infty[0,2\pi]$, jolle $f(x) = g(x)$ melkein kaikkialla.

[Vihje: Osoita että f:n Fourier sarjaa voi derivoida.]