**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Funktionaalianalyysin peruskurssi**
**Harjoitus 6**
**29.2.2012**

1. Jono $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\cos(nt) + i\sin(nt)), \quad n \in \mathbb{Z}$, on ortonormaali avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$. Laske funktion $g(t) = t$ Fourier kertoimet $(g|e_n)$.

2. Olkoon $E = L^2(-1, 1)$ ja $M = \{f \in E : f(x) = f(-x)\,\text{m.k.}\; x \in [-1, 1]\}$ parillisten funktioiden muodostama vektorialivaruus. Osoita, että $M$ on suljettu $E$:ssä, ja määrää projektio $P_M(h)$ sekä etäisyys $\operatorname{dist}(h, M)$, kun $h(x) = e^x,\ x \in [-1, 1]$.

3. Olkoon $E$ Hilbertin avaruus ja $M$ sen suljettu vektorialiavaruus. Osoita, että jokaisella $x \in E$,

$$\min\{\|x - m\| \,:\, m \in M\} = \max\{\, |(x|y)| \,:\, y \in M^\perp,\ \|y\| = 1\}.$$

4. Tarkastellaan sisätulon $(f|g) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x^2} dx$ määräämää painotettua $L^2$-avaruutta, eli Hilbertin avaruutta $E = L^2(w),\ w(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$. Osoita, että jokainen polynomi $P(x) \in E$, ja että kaikille polynomeille $P$ ja $Q$ pätee

$$(P \,|\, A_+ Q) = (A_- P \,|\, Q)$$

missä $A_+\phi = -\phi'(x) + 2x\phi(x)$ ja $A_-\phi = \phi'(x)$.

5. Hermiten polynomit $H_n,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ määritellään kaavalla $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$. Osoita, että funktiot $e_n := (2^n n!)^{-1/2} H_n$ muodostavat ortonormaalin jonon edellisessä tehtävässä määritellyssä Hilbertin avaruudessa $E = L^2(w)$.
[Vihje: Osoita, että $A_+ H_n(x) = H_{n+1}(x)$ ja $A_- H_n(x) = 2n H_{n-1}(x)$.Voit olettaa tunnetuksi, että $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. ]