Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 5
22.2.2012

1. (i) Jos E on Banach avaruus ja $A \subset E$, osoita, että joukko

$$conv(A) := \cap\{X : A \subset X,\ X \text{ konveksi }\}$$

on konveksi. Lisäksi, ko. joukko on pienin konveksi joukko joka sisältää A:n. [Joukko $conv(A)$ on A:n *konveksi verho*, ja sen sulkeumaa $\overline{conv}(A)$ kutsutaan A:n suljetuksi konveksiksi verhoksi.

(ii) Olkoon $A = \{0\} \cup \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^p$; tässä $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (ykkönen n:nnellä paikalla). Näytä että jokaisella $1 \le p \le \infty$,

$$\overline{conv}(A) = \{(x_j)_1^\infty :\ 0 \le x_j \le 1,\ \sum_1^\infty x_j \le 1\}$$

2. Olkoon E sisätuloavaruus ja $x_n, x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, vektoreita joille

(i) $\|x_n\| \to \|x\|$ ja (ii) $(x_n|x) \to \|x\|^2$, kun $n \to \infty$.

Näytä, että jos molemmat ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa, silloin $\|x_n - x\| \to 0$ kun $n \to \infty$, mutta kumpikaan ehto erikseen ei tähän riitä.

3. Oletamme että $1 \le p < \infty$ ja $p \ne 2$. Osoita, että silloin avaruudet ℓ^p ja $L^p(0,1)$ eivät ole Hilbertin avaruuksia (siis normi $\|\cdot\|_p$ ei ole minkään sisätulon indusoima).
[*Vihje.* Testaa suunnikasyhtälön voimassaoloa sopivilla yksinkertaisilla funktioilla f ja g.]

4. Olkoon $x_0 = (1/n)_{n=1}^\infty \in \ell^2$ sekä $A = \overline{conv}(x_0 - e_n : n \in \mathbb{N})$, vrt. Teht. 1. Osoita, että $\sup\{\|x\|_2^2 : x \in A\} = 1 + \|x_0\|_2^2$, mutta $\|x\|_2^2 < 1 + \|x_0\|_2^2$ jokaisella $x \in A$. Toisin sanoen, A on Hilbert avaruuden konveksi, suljettu ja rajoitettu osajoukko, jossa ei ole normin *maksimoivaa* alkiota.

5. Olkoon $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tarkastellaan Volterran operaattoria $T : C(0,1) \to C(0,1)$,

$$Tf(t) = \int_0^t K(t,s) f(s) ds.$$

Osoita, että riittävän suurilla n operaattorin T iteraatti T^n on kontraktio avaruudessa $C(0,1)$. Osoita tämän tuloksen ja HT4/Teht.5 avulla että jokaisella $g \in C(0,1)$, integraaliyhtälöllä

$$f(t) + \int_0^t K(t,s)f(s)ds = g(t), \qquad t \in [0,1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in C(0,1)$.

[*Vihje*: Selvitä minkälaisen lisätekijän antaa *määräämättömän* integraalin iterointi n kertaa peräkkäin.]