Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 4
15.2.2012

1. Osoita että $L^q(0,1) \subset L^p(0,1)$, jos $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
Entä sisältyykö $L^p(\mathbb{R})$ avaruuteen $L^q(\mathbb{R})$ joillakin $p \neq q$? Jos ei, anna vastaesimerkit.
Kolmanneksi, jos $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ ja $1 \leq p \leq q \leq \infty$, näytä, että silloin $f \in L^r(\mathbb{R})$ jokaisella indeksillä $p \leq r \leq q$.

2. Osoita, että *epälineaarisella* integraaliyhtälöllä

$$2f(x) - \int_0^1 (x-s)f(s)^3 ds = 1, \qquad x \in [0,1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu joukossa $\{f \in C(0,1) : \|f\|_\infty \leq 1\}$.

3. Olkoon $f_n(x) = (-1)^n x^n$ kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja $\sum f_n$ avaruudessa $L^p(0,1)$, kun $1 \leq p < \infty$? Jos näin on, suppeneeko ko. sarja absoluuttisesti eli itseisesti ?

4. Olkoon E Banachin avaruus, $M \subset E$ suljettu vektorialiavaruus ja muodostetaan tekijäavaruus $E/M = \{x + M : x \in E\}$. Vektoriavaruudesta E/M tulee normiavaruus kun asetetaan

$$\|x + M\| = \inf\{\|x - m\| : m \in M\}.$$

Selvästi $\|x + M\| \leq \|x\|$ kaikilla $x \in E$.
Tehtävä: Osoita, että $(E/M, \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus.
[Vihje: Osoita, että avaruuden E/M absoluuttisesti summautuvat sarjat ovat summautuvia. Luentomuistiinpanojen s. 60 harjoitustehtävän yhteydessä lisävihjeitä; s. 46 ja 51 lisätietoja avaruudesta E/M.]

5. Todista seuraava Banachin kiintopistelauseen johdannainen:
Olkoon D Banachin avaruuden E suljettu osajoukko ja $T : D \to D$. Merkitään T^n:llä kuvauksen T n-kertaista iteraattia, so. $T^n = T \circ T^{n-1}$.
Jos T^n on aito kontraktio jollakin $n \in \mathbb{N}$, osoita että silloin kuvauksella T on yksikäsitteinen kiintopiste joukossa D.