Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 3
8.2.2012

1. Tarkastellaan avaruuden $C(0,1)$ osajoukkoja M, varustettuna normilla $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Onko M Banach avaruus, kun

   a) $M = \{f \in C(0,1) : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$,
   b) $M = \{f \in C(0,1) : f(0) = 0 \text{ ja } f(1) = 1\}$,
   c) $M = \{f \in C(0,1) : \text{ jollekin } \varepsilon > 0,\ f(x) = 0 \text{ kun } 0 \leq x < \varepsilon\}$.

2. Olkoon E Banach avaruus ja $M \subset E$ sen aito vektorialiavaruus, siis $M \neq E$. Osoita, että M ei voi olla avoin E:ssä.

3. Olkoon $f_n(x) = (-1)^n x^n$ kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja $\sum f_n$ avaruudessa $C(0,1)$?

4. Olkoon E Banach avaruus ja $T : E \to \mathbb{K}$ lineaarinen kuvaus (kuten aina $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$). Kuvauksen T *ydin* on

$$Ker(T) = \{x \in E : Tx = 0\}.$$

Osoita, että T on jatkuva jos ja vain jos $Ker(T)$ on E:n suljettu aliavaruus.

[Vihje: suuntaan " $\Leftarrow$ ", oleta ettei T ole jatkuva origossa ja näytä että silloin $Ker(T)$ ei ole suljettu.]

5. Kun $0 < \alpha < 1$, olkoon Lip_α sellaisten funktioiden $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ joukko, joille

$$\|f\|_\alpha = |f(0)| + \sup_{s\neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha} < \infty.$$

Tällaisia funktioita kutsutaan kertaluvun α *Lipschitz-funktioksi*, tai myös *Hölder-jatkuviksi* funktioiksi (eksponentilla α).

Näytä aluksi, että Lip_α on vektoriavaruus ja että $\|\cdot\|_\alpha$ on normi. Osoita sen jälkeen, että $(Lip_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ on Banachin avaruus.

Huom: $\quad |f(s) - f(t)| \leq \|f\|_\alpha \cdot |s-t|^\alpha$ kaikilla $s, t \in [0,1],\ f \in Lip_\alpha$.