Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 2
1.2.2012

1. Olkoon $1 < p < \infty$. Etsi jono vektoreita $(x^{(n)}) \subset \ell^p$, joille pätee: $\|x^{(n)}\|_p \leq 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, mutta jonolla $(x^{(n)})$ ei ole yhtään osajonoa, joka suppenee ℓ^p:n normin $\|\cdot\|_p$ suhteen.

[*Huom.:* Tässä $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Esimerkin perusteella suljettu yksikköpallo B_{ℓ^p} on rajoitettu ja suljettu joukko, joka *ei* ole kompakti avaruudessa ℓ^p.]

2. Olkoon $1 \leq p < q < \infty$. Näytä, että $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ kun $x = (x_n) \in \ell^p$. Päättele, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$ kun $1 \leq p < q < \infty$.

[*Vihje.* Tutki aluksi sellaista jonoa $x = (x_n) \in \ell^p$ jolle $\|x\|_p = 1$.]

3. Jos $f \in C(0,1)$, asetetaan

$$Tf(x) = \int_0^1 \sqrt{x}\, f(t^2)\, dt, \qquad x \in [0,1].$$

Osoita, että T on hyvin määritelty ja jatkuva (eli rajoitettu) lineaarinen kuvaus $T : C(0,1) \to C(0,1)$. Määrää T:n normi $\|T\|$.

4. Määrää jatkuvuusmoduli funktioille $f(x) = x^2$ ja $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$.
[vrt. Luentomuistiinpanot s. 28]

5. Kun $1 \leq p \leq \infty$ ja $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$, asetamme

$$Tx = T(x_k)_{k=1}^{\infty} := \Big(\frac{1}{k} x_k\Big)_{k=1}^{\infty} = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots).$$

Selvitä millä indeksin $1 \leq p \leq \infty$ arvoilla T määrää jatkuvan lineaarikuvauksen

$$T : \ell^p \to \ell^1.$$

[Vihje: Tapaus $p = 2$ on selvitetty luentomuistiinpanoissa.]