Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 12
2.5.2012

1. Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ jono. Sanotaan, että (x_n) suppenee *heikosti* avaruudessa E kohti vektoria $x \in E$, jos $x^*(x) = \lim_n x^*(x_n)$ kaikilla $x^* \in E^*$. (Merkintä: $x_n \xrightarrow{w} x$ kun $n \to \infty$).

Tutki, suppeneeko jono (e_n) heikosti avaruuksissa c_0 tai ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, kun $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ ja $n \in \mathbb{N}$ (ykkönen n:ssä paikassa).

2. Olkoon $0 < p < 1$. Anna esimerkki aliavaruudesta $M \subset L^p(0,1)$ ja jatkuvasta, nollasta eroavasta funktionaalista $T : M \to \mathbb{K}$.

Tehtävän opetus on se ettei Hahn-Banachin lause toimi L^p-avaruuksille kun $0 < p < 1$.

3. Olkoon $1 < p < \infty$, ja asetetaan $\langle f, x^* \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 f(|x|)dx$, $f \in L^p(-1,1)$. Osoita että $x^* \in L^p(-1,1)^*$.

Luennoilta tiedämme, että duaalin alkiota $x^* \in L^p(-1,1)^*$ vastaa yksikäsitteinen funktio $g \in L^q(-1,1)$, $1/p + 1/q = 1$, jolle

$$\langle f, x^* \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Osoita että $x^* \in L^p(-1,1)^*$ ja määrää edellämainittu funktio $g \in L^q(-1,1)$ kun

(i) $\langle f, x^* \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 f(|x|)dx$;

(ii) $\langle f, x^* \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 f(|x|)dx$.

4. Olkoon $g \in C(0,1)$ kiinnitetty jatkuva funktio $[0,1] \to \mathbb{R}$. Tutki Arzela-Ascolin lauseen avulla onko joukko $\{g_s : 0 \leq s \leq 1\}$ relatiivisesti kompakti avaruudessa $C(0,1)$, kun

$$g_s(t) = g(st), \quad t \in [0,1] \text{ ja } s \in [0,1].$$

[*Vihje:* funktion g tasaisesta jatkuvuudesta on hyötyä.]

5. Olkoot E, F Banachin avaruuksia. Muistetaan että $T : E \to F$ on kompakti, jos joukon $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ kuva $T(B_E)$ on relatiivisesti kompakti F:ssä. Osoita että seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(1) T on kompakti;

(2) $T(U) \subset F$ on relatiivisesti kompakti kaikilla rajoitetuilla $U \subset E$;

(3) Jokaisella rajoitetulla jonolla $(x_n) \subset E$ on olemassa osajono (x_{n_k}), siten että jono (Tx_{n_k}) suppenee F:ssä.