Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 11
25.4.2012

1. Olkoon $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ välin $[0,1]$ kaikki rationaalipisteet. Asetetaan

$$x^*(f) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{-k} f(q_k), \quad \text{kun } f \in C(0,1),$$

Näytä, että $x^* \in C(0,1)^*$ ja laske normi $\|x^*\|$.

2. Asetetaan

$$\phi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt, \quad f \in C(0,1).$$

(i) Näytä, että $\phi \in C(0,1)^*$ ja laske normi $\|\phi\|$.
(ii) Onko olemassa sellaista funktiota $f \in C(0,1)$, jolle $\|f\|_\infty = 1$ ja $|\phi(f)| = \|\phi\|$?

3. Näytä, että duaaliavaruus $c_0^* = \ell^1$. [*Vihje:* Vrt. Muistiinpanojen Esimerkki 9.3.]

4. Olkoon $\tau : \ell^\infty \to \ell^\infty$ siirto, eli $\tau : (x_1, x_2, \dots) \to (x_2, x_3, \dots)$. Osoita, että Banachin raja $x^* : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ (vrt. esim. 9.17 muistiinpanoissa) voidaan rakentaa niin että $x^*(\tau x) = x^*(x)$ jokaisella $x \in \ell^\infty$.

[*Vihje:* Sovella Hahn-Banachin lausetta lineaarikuvaukseen $x^*(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$ kun $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c$, ja seminormiin $p(x) := \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right|$. Tarkastele suuretta $x^*(\tau x - x),\ x \in \ell^\infty$.]

5. Olkoon $0 < p < 1$. Määritellään avaruus $L^p(0,1)$ niiden mitallisten funktioiden joukkona, joille

$$\|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty.$$

Suure $\|\cdot\|_p$ ei ole normi (se on itseasiassa metriikka), mutta voimme silti määritellä Cauchy-jonot ja suppenemisen kuten tehtiin kun $p \geq 1$; erityisesti siis $f_n \to f$ jos $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Nollafunktionaali kuuluu selväsi avaruuden $L^p(0,1)$ duaaliin. Osoita, ettei duaalissa $(L^p(0,1))^*$ ole muita alkioita !

[*Vihje:* Jos $0 \neq T : L^p(0,1) \to \mathbb{R}$ on lineaarinen, valitse $f \in L^p$, jolle $T(f) \geq 1$.

Voit olettaa tunnetuksi, että $t \mapsto \int_0^t |f(x)|^p dx$ on jatkuva. Löytyy siis $0 < t < 1$ jolle $\|f\chi_{[0,t]}\|_p = \|f\chi_{[t,1]}\|_p = \frac{1}{2}\|f\|_p$, ja lineaarisuuden nojalla joko $T(f\chi_{[0,t]}) \geq \frac{1}{2}$ tai $T(f\chi_{[t,0]}) \geq \frac{1}{2}$. Oletetaan ensimmäinen tapaus, ja merkitään $f_1 = 2f\chi_{[0,t]}$.

Tee ylläoleva operaatio sitten f_1 :lle jne. Saat jonon funktioita f_n joille $T(f_n) \geq 1$ mutta $\|f_n\|_p \leq 2^{n(p-1)}\|f\|_p$; päättele ettei T ole jatkuva origossa.]