Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 10
18.4.2012

1. Olkoot $A = \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ ja $B = \{-e_n + \frac{1}{n}e_1 : n \in \mathbf{N}\}$, missä e_n, $n \in \mathbb{N}$, ovat avaruuden ℓ^1 luonnolliset kantavektorit.

Osoita, että A ja B ovat suljettuja ja rajoitettuja ℓ^1:ssä, mutta summajoukko $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ei ole suljettu.

2. Olkoon E Banach-avaruus, kerroinkuntana $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Jos $T : E \to \mathbb{K}$ nollasta eroava jatkuva lineaarikuvaus, osoita suoraan (ilman avoimen kuvauksen lausetta) että T on avoin.

3. Anna esimerkki *epäjatkuvasta* funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka kuvaaja $G(f) = \{\, (x, f(x)) : \; x \in \mathbb{R}\}$ on suljettu $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

4. Olkoon E Hilbertin avaruus ja $(x_n) \subset E$ jono, jolle $\sum_{n=1}^{\infty} |(x|x_n)|^2 < \infty$ kaikilla $x \in E$. Näytä suljetun kuvaajan lauseen avulla että $T : E \to \ell^2$ on jatkuva lineaarikuvaus, kun asetetaan

$$Tx = ((x|x_n))_{n\in\mathbf{N}}, \quad x \in E.$$

5. Luennolla todistimme suljetun kuvaajan lauseen käyttämällä apuna avoimen kuvauksen lausetta.

Todista, että olisimme voineet toimia myös kääntäen, so. todista suljetun kuvaajan lauseen avulla: Jos E ja F ovat Banach avaruuksia, jokainen surjektiivinen $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on avoin kuvaus.

Voit halutessasi olettaa, että $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on bijektio.

[*Vihje yleiseen tapaukseen:* Muodosta tekijäavaruus $E/Ker(T)$, vrt. HT 4/Teht. 4, ja tarkastele (bijektiota) $T : E/Ker(T) \to F$.]