Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 1
25.1.2012

1. a) Olkoon $B(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K}$ rajoitettu kuvaus$\}$, varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty$. Osoita että $C(0,1)$ on $B(0,1)$:n suljettu vektorialiavaruus.

b) Näytä, että jonoavaruus c_0 on l^∞:n suljettu vektorialiavaruus.

2. a) Osoita, että

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

määrittelee normin avaruudessa $C(0,1)$. Ovatko $C(0,1)$:n normit $\|f\|_\infty$ ja $\|f\|_1$ ekvivalentteja ?

b) Osoita, että jokaisessa normiavaruudessa E ekvivalentit normit määräävät samat avoimet ja suljetut joukot.

3. Olkoon $f_n(x) = n\left(e^{x/n} - 1\right)$ ja $f(x) = x$, kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita, että $f_n \to f$ avaruuden $C(0,1)$ normin mielessä, so. $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, kun $n \to \infty$.

[Vihje: tutki erotusfunktion ääriarvoja tai käytä väliarvolausetta.]

4. Osoita, että c_0 on separoituva.

[Vihje: Osoita että "finiittiset jonot" $c_{00} = \{\, x = (x_j)_{j=1}^\infty : x_j \neq 0$ vain äärellisen monella $j\}$ on separoituva ja tiheä c_0:ssa.]

5. Osoita, että l^∞ ei ole separoituva.

[Vihje: Tutki esimerkiksi karakterististen funktioiden perhettä $\{\chi_A : A \subset \mathbb{N}\}$, ja päättele kuten lauseessa 1.5. Vaihtoehtoisesti, diagonalisoi.
Voit pitää tunnettuna, että potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$ on ylinumeroituva. Yllä $\chi_A(n) = 1$ jos $n \in A$, ja $\chi_A(n) = 0$, jos $n \notin A$.]