Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
II. Kurssikoe ja ratkaisut 9.5.2012.

Vastaa valintasi mukaan **neljään** tehtävään.

1. (i) Asetetaan $\phi(f) := f(1) - f(0)$, kun $f \in C(0,1)$. Osoita, että

$$\phi \in \Big(C(0,1)\Big)^*.$$

(ii) Osoita , että on olemassa $\phi \in \Big(L^\infty(0,1)\Big)^*$, jolle $\phi(f) = f(1) - f(0)$ aina kun $f \in C(0,1)$. Perustele vastauksesi.

RATKAISU 1: (i) Selvästi ϕ on lineaarinen ja hyvin määritelty $C(0,1) \to K$. Jos $f \in C(0,1)$, niin $|\phi(f)| \le |f(0)| + |f(1)| \le 2\|f\|_\infty$, mistä nähdään että ϕ on jatkuva. Siis $\phi \in \Big(C(0,1)\Big)^*$.

(ii) Koska $C(0,1) \subset L^\infty(0,1)$ on aliavaruus, niin Hahn-Banachin lauseen nojalla edellisen kohdan kuvaus ϕ voidaan jatkaa duaalin $\Big(L^\infty(0,1)\Big)^*$ alkioksi.

2. (*teoria*)
(i) Esitä Banach-Steinhausin lause, eli tasaisen rajoituksen periaate. (Lausetta *ei tarvitse todistaa.*)

(ii) Perustele Banach-Steinhausin lauseen avulla seuraava väite:
Olkoon E Banach avaruus, ja $(S_n) \subset \mathcal{L}(E)$ sellainen jono jatkuvia lineaarikuvauksia, että $Sx := \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ on olemassa jokaisella $x \in E$. Silloin $S : E \to E$ on jatkuva lineaarikuvaus, eli $S \in \mathcal{L}(E)$.

RATKAISU 2: (i) Lause 7.3 luentomuistiinpanoissa. Olkoon E Banach, F normiavaruus ja $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ kokoelma jatkuvia lineaarikuvausia $E \to F$, missä J on epätyhjä indeksijoukko. Tällöin yksi ja vain yksi seuraavista on voimassa:
(a) On olemassa $M < \infty$ siten että $\|T_\alpha\| < M$ kaikilla $\alpha \in J$;
(b) On olemassa $x \in E$ siten että $\sup_{\alpha\in J} \|T_\alpha x\| = \infty$.

(ii) Raja-arvon lineaarisuudesta seuraa, että S on lineaarinen. Jos $x \in E$, niin $S_n x \to Sx$, mistä nähdään erityisesti että $\sup_{n\in N} \|S_n x\| < \infty$. Näin ollen

Banach-Steinhausin lauseen kohta (a) pätee. Siten on olemassa $M < \infty$, jolle $\|S_n\| < M$ kaikilla n. Tällöin kaikilla $x \in E$ pätee

$$\|Sx\| = \lim_{n\to\infty} \|S_n x\| \leq M\|x\|,$$

joten S on jatkuva ja sen normi on enintään M.

3. Jos asetetaan

$$(Tx)_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+k},$$

määrääkö silloin T rajoitetun operaattorin $T : \ell^1 \to c_0$? Jos näin on, määrää sen transpoosi $T^* : \ell^1 \to \ell^\infty$.

RATKAISU 3: Muistetaan että operaattorin $S : E \to F$ transpoosi on kuvaus $T^* : F^* \to E^*$, joka toteuttaa $(T^*y^*)(x) = y^*(Tx)$, missä $x \in E$ ja $y^* \in F^*$. Koska tunnetaan että $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ ja $c_0^* = \ell^1$, niin tehtävässä todella etsitään kuvausta $\ell^1 \to \ell^\infty$.

Jos $x \in \ell^1$, niin

$$|(Tx)_k| = |\sum_{n=k+1}^{\infty} x_n| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n| \to 0,$$

joten $T : \ell^1 \to c_0$. Lineaarisuus on selvää ja edellsestä arviosta saadaan myös $\|Tx\|_\infty \leq \|x\|_1$. Siten T on rajoitettu operaattori.

Havaitaan ensin että $Te_n = (1, 1, 1..., 1, 0, 0, ...)$, siis jono jonka alussa on $n-1$ ykköstä ja sen jälkeen nollaa. Jokaiselle avaruuden ℓ^∞ alkiolle z pätee $z_k = \langle e_k, z\rangle$. Siten erityisesti

$$(T^*y)_k = \langle e_k, T^*y\rangle = \langle Te_k, y\rangle = \sum_{n=1}^{k-1} y_n,$$

missä $y \in \ell^1$. Siis $(T^*y)_k = \sum_{n=1}^{k-1} y_n$.

4. Jos $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ on jatkuva, osoita että operaattori

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$$

kompakti operaattori $C(0,1)$:ssä.

[Vihje: K on tasaisesti jatkuva.]

RATKAISU 4: Havaitaan ensin että K on tasaisesti jatkuva joukossa $[0,1]^2$. Siten kaikille $\epsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$ siten että $|K(x,y) - K(x',y')| < \epsilon$ kunhan $\|(x,y) - (x',y')| < \delta$.

Selvästi T on lineaarinen. Jos $f = 0$, niin saadaan nollakuvaus joka on jatkuva. Jos taas $f \neq 0$, ja $\epsilon > 0$, niin valitaan $\delta > 0$ sellaiseksi että $|K(x,y) - K(x',y')| < \epsilon/\|f\|_\infty$ kunhan $\|(x,y) - (x',y')| < \delta$. Jos nyt $|x - x'| < \delta$, niin tällöin $|K(x,y) - K(x',y)| < \epsilon/\|f\|_\infty$ ja saadaan

$$|Tf(x) - Tf(x')| \leq \int_0^1 |K(x,y) - K(x',y)||f(y)|dy < \epsilon.$$

Siis Tf on aina tasaisesti jatkuva, erityisesti $T : C(0,1) \to C(0,1)$ on hyvin määritelty lineaarikuvaus. Koska $\sup_{x,y \in [0,1]} |K(x,y)| = M < \infty$, niin saadaan helposti arvio

$$\|Tf\|_\infty \leq \int_0^1 M\|f\|_\infty dy,$$

joten T on jatkuva.

Osoitamme lopuksi että T on kompakti. Olkoon B avaruuden $C(0,1)$ suljettu yksikkökuula, jolloin pitää osoittaa $T(B) \subset C(0,1)$ relatiivisesti kompaktiksi.

Jos $f \in B$, niin $|Tf(x)| \leq \|Tf\|_\infty \leq \|T\|$, mistä nähdään että $T(B)$ on pisteittäin rajoitettu. Olkoon $x \in [0,1]$ ja $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ siten että $|K(x,y) - K(x',y')| < \epsilon$ kunhan $\|(x,y) - (x',y')| < \delta$. Jos $f \in B$, niin tällöin (kuten aikaisemminkin jo huomattiin)

$$|Tf(x) - Tf(x')| < \epsilon,$$

joten $T(B)$ on yhtäjatkuva jokaisessa pisteessä.

Arzela-Ascolin lauseen mukaan $T(B)$ on relatiivisesti kompakti, mikä tarkoittaa sitä että T on kompakti.

5. Olkoon $T \in \mathcal{L}(E)$, missä $E = L^1(0,1)$.

Oletetaan että $T(f) \in L^\infty(0,1)$ jokaisella $f \in L^\infty(0,1)$. Osoita suljetun kuvaajan lauseen avulla, että silloin $T : L^\infty(0,1) \to L^\infty(0,1)$ on jatkuva operaattori.

RATKAISU 5: Todetaan ensin, että oletuksien perusteella voidaan ajatella $T : L^\infty(0,1) \to L^\infty(0,1)$ hyvin määriteltynä lineaarikuvauksena. Tehdään seuraavat havainnot:

(1) $L^\infty(0,1) \subset L^1(0,1)$;

(2) Jos $f \in L^\infty(0,1)$, niin $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.

Havainnoista seuraa erityisesti se, että jos jono $f_n \to f$ avaruudessa $L^\infty(0,1)$, niin $f_n \to f$ myös avaruudessa $L^1(0,1)$.

Pyritään käyttämään suljetun kuvaajan lausetta. Oletetaan että (f_n) on jono avaruudessa $L^\infty(0,1)$ ja että $f_n \to f$. Oletetaan lisäksi että $Tf_n \to F \in L^\infty$. Jatkuvuus on osoitettu mikäli $Tf = F$. Edellisten havaintojen perusteella $f_n \to f$ ja $Tf_n \to F$ myös avaruudessa $L^1(0,1)$. Koska $T : L^1(0,1) \to L^1(0,1)$ on jatkuva, niin $Tf = F$ avaruudessa $L^1(0,1)$. Mutta tämä tarkoittaa että $Tf = F$ melkein kaikkialla, joten $Tf = F$ avaruudessa $L^\infty(0,1)$.

Suljetun kuvaajan lauseen nojalla $T : L^\infty(0,1) \to L^\infty(0,1)$ on jatkuva.