Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
I. Kurssikoe ja ratkaisut 1.3.2012.

Vastaa valintasi mukaan **neljään** tehtävään.

1. Olkoon $g(x) = 6x$ kun $x \in [-1, 1]$. Laske funktion $g \in L^2(-1, 1)$ etäisyys $L^2(-1, 1)$:n suljetusta aliavaruudesta

$$M = \{f \in L^2(-1, 1) : f(x) = 0 \text{ melkein kaikilla } 0 \le x \le 1\}.$$

Mikä on g:n etäisyys yksikköpallosta $B = \{f \in L^2(-1, 1) : \|f\| \le 1\}$?

RATKAISU 1: Olkoon $f \in M$, jolloin

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_2^2 &= \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx \\
&= \int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|^2 + \int_{0}^{1} |g(x)|^2 dx \\
&\ge \int_{0}^{1} |g(x)|^2 dx \\
&= \int_{0}^{1} 36x^2 dx = 12.
\end{aligned}$$

Asettamalla $h(x) = \chi_{[-1,0]}(x)g(x)$ nähdään että $h \in M$ ja $\|h - g\|_2^2 = 12$. Näin ollen $\mathrm{dist}(g, M) = \sqrt{12}$.

Voidaan myös määritellä ortoprojektio $P : L^2(-1, 1) \to M$ kaavalla $Pf(x) = \chi_{[-1,0]}f(x)$, jolloin saadaan sama tulos kaavalla

$$\mathrm{dist}(g, M) = \|g - Pg\|_2.$$

Olkoon nyt $h \in B$. Kolmioepäyhtälön toinen puoli antaa

$$|\|g\|_2 - \|h\|_2| \le \|g - h\|_2.$$

Koska $\|h\|_2 \le 1$ ja $\|g\|_2 = \sqrt{24}$, niin saadaan

$$\sqrt{24} - 1 \le \|g - h\|_2$$

kaikilla $h \in B$. Toisaalta määritellään $G = g/\|g\|_2 \in B$, jolloin

$$\|g - G\|_2 = (1 - 1/\sqrt{24})\|g\|_2 = \sqrt{24} - 1.$$

Siis on osoitettu että $\mathrm{dist}(g, B) = \sqrt{24} - 1$.

2. Olkoon $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$; siis jonon n:s termi 1, muut termit 0:ia.

a) Jos $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n$ avaruudessa c_0 ?

b) Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ avaruudessa l^{∞} ?

Perustele vastauksesi.

RATKAISU 2: (a) Merkitään $Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Tällöin $Y_n \in c_0$ ja

$$\|Y_n - y\|_{\infty} = \sup_{k>n} |y_k|,$$

joka suppenee nollaan koska jono (y_n) suppenee nollaan.

(b) Merkitään $X_n = \sum_{k=1}^{n} e_n$, jolloin selvästi $X_n \in \ell^{\infty}$. Olkoot nyt $m > n$. Tällöin

$$\|X_m - X_n\|_{\infty} \geq |X_m(m) - X_n(m)| = 1,$$

mistä nähdään että osasummien jonossa kaikki jäsenet ovat vähintään etäisyyden 1 päässä toisistaan. Näin ollen, osasummien jono ei ole Cauchy, eikä voi supeta.

3. Olkoon E separoituva Hilbertin avaruus.

i) E:n vektoreista x ja y tiedetään että $\|x\| = 3$, $\|x+y\| = 4$ ja $\|x-y\| = 5$. Minkälaisia arvoja voi silloin $\|y\|$ saada ?

ii) (*teoria*) Olkoon e_n, $n = 1, 2, \dots$ ortonormaali jono avaruudessa E. Esitä (ilman todistusta) kolme eri ehtoa, joiden avulla voidaan tarkistaa onko annettu jono (e_n) Hilbertin kanta avaruudessa E.

RATKAISU 3: (i) Muistetaan suunnikasyhtälö

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2.$$

Sijoittamalla annetut suureet tähän, saadaan

$$18 + 2\|y\|^2 = 25 + 16,$$

mistä voidaan ratkaista $\|y\| = \sqrt{23}/\sqrt{2}$.

(ii) Ehtoja löytyy luentojen lauseesta 4.40.

(1) Kaikilla n pätee $(x|e_n)$ jos ja vain jos $x = 0$;

(2) Jos merkitään $x_n = \sum_{k=1}^{n}(x|e_k)e_k$, niin $x_n \to x$ kaikilla $x \in E$;

(3) Kaikilla $x \in E$ pätee Parsevalin yhtälö:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n|x)|^2;$$

(4) Kaikilla $x, y \in E$ pätee Plancherelin kaava:

$$(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)\overline{(y|e_n)}.$$

4. Kun $x = (x_k)_1^\infty \in \ell^1$, asetetaan uusi lukujono kaavalla $Tx = \left(\sum_{n=k}^{\infty} x_n\right)_{k=1}^{\infty}$. Osoita, että $Tx \in c_0$ aina kun $x \in \ell^1$ ja selvitä onko näin määritelty kuvaus jatkuva operaattori $T : \ell^1 \to c_0$.
Onko kuvauksen T normi $\|T\| < \infty$? Jos on, määrää $\|T\|$.

RATKAISU 4: Olkoon $x \in \ell^1$. Tällöin kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$|Tx(k)| = |\sum_{n=k}^{\infty} x_n| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |x_n| \leq \|x\|_1,$$

ja koska $\sum_{n=k}^{\infty} |x_n| \to 0$ kun $k \to \infty$, niin on osoitettu että $T : \ell^1 \to c_0$ on hyvin määritelty ja rajoitettu. Normille pätee $\|T\| \leq 1$.

Olkoon nyt $y = (1/n^2)_{n=1}^{\infty}$, jolloin tunnetusti $y \in \ell^1$. Lisäksi

$$\|Ty\|_\infty \geq Ty(1) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \|y\|_1.$$

Siten nähdään että $\|T\| = 1$.

5. Olkoon $E = C(0,1)$, kerroinkuntana $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ja tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$f(x) - \int_0^1 x\,t\,\sin\big(f(t)\big)\,dt = e^x, \qquad x \in [0,1].$$

Todista, että (avoimessa !) joukossa $\{f \in E : \|f\|_\infty < 6\}$ yo. yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu.

RATKAISU 5: Tarkastellaan kuvausta

$$Tf(x) = \int_0^1 xt \sin(f(t))dt + e^x.$$

Selvästi nähdään että $Tf \in C(0,1)$ kun $f \in C(0,1)$, joten kuvaus on hyvin määritelty.

Tarkastellaan nyt T:n kiintopisteitä. Mikäli osoitetaan että tällä kuvauksella on yksikäsitteinen kiintopiste tehtävän joukossa B, niin tämä piste on myös yksikäsitteinen ratkaisu tehtävän yhtälölle tässä joukossa. Olkoon $f \in C(0,1)$, jolloin voidaan arvioida

$$|Tf(x)| \leq \int_0^1 |xt||\sin(f(t))|dt + e \leq \int_0^1 tdt + e \leq 4.$$

Siten on osoitettu että $\|Tf\|_\infty \leq 4$ kaikille f. Jos nyt $f, g \in C(0,1)$, niin pätee

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tg(x)| &\leq \int_0^1 |xt||\sin(f(t)) - \sin(g(t))|dt \\ (*) &\leq \int_0^1 |xt||f(t) - g(t)|dt \\ &\leq (1/2)\|f - g\|_\infty, \end{aligned}$$

missä kohdassa $(*)$ käytettiin väliarvolausetta ja sitä havaintoa että kosini on itseisarvoltaan ykköstä pienempi. Näin ollen T on aito kontraktio $C(0,1)$:ssä.

Koska T on aito kontraktio ja $C(0,1)$ on täydellinen, niin Banachin kiintopistelauseen mukaan on olemassa yksikäsitteinen kiintopiste $h \in C(0,1)$, joka toteuttaa $Th = h$. Mutta aikaisempien havaintojen perusteella $\|h\|_\infty = \|Th\|_\infty \leq 4$, joten $h \in B$. Siis h on T:n kiintopiste B:ssä, eikä muita kiintopisteitä löydy edes koko avaruudesta $C(0,1)$. Erityisesti h on yksikäsitteinen kiintopiste B:ssä.