Epästationaariset aikasarjat kl 2012, HT 6, viikko 9

Kahdessa ensimmäisessä tehtävässä tarvittava R-koodi löytyy kurssisivulta HT:ssä 5.1 ja 5.2 käytetyn R-koodin päivitetystä versiosta (R-koodi_2).

1. (Jatkoa HT:lle 5.1). HT:ssä 5.1 todettiin, että Lydia Pinkham -aineistossa yi-aste $r = 1$ sai tukea.

(i) Estimoi virheenkorjausmalli eli monisteen malli (5.11) perustuen tähän tulokseen normalisoiden yi-vektori mielestäsi sopivammalta tuntuvan sarjan komponentin mukaan. Muodosta yi-vektorin tuntemattomalle parametrille approksimatiivinen 95%:n luottamusväli. Yritä myös tulkita estimoimaasi yi-relaatiota.

(ii) Tutki α– ja Λ_j–parametrien alkioiden estimaatteja "t–suhteita" käyttäen ja pohdi erityisesti voitaisiinko α:n ensimmäinen (toinen) komponentti ja kaikkien Λ_j–matriisien oikean yläkulman (vasemman alakulman) alkiot tulkita nollaksi. Jos voidaan, niin miten tulkitset "virheenkorjausmekanismia"? Piirrä myös mallin impulssivasteiden kuvat.

2. (Jatkoa HT:lle 5.2). HT:ssä 5.2 todettiin, että maapallon lämpötila -aineistossa yi-aste $r = 1$ sai tukea.

(i) Estimoi virheenkorjausmalli eli monisteen malli (5.13) perustuen tähän tulokseen normalisoiden yi-vektori mielestäsi sopivammalta tuntuvan sarjan komponentin mukaan. Muodosta yi-vektorin tuntemattomalle parametrille approksimatiivinen 95%:n luottamusväli. Tutki myös vaikuttaako aikatrendi yi-relaatiossa tarpeelliselta ja yritä tulkita estimoimaasi yi-relaatiota.

(ii) Tutki α– ja Λ_j–parametrien alkioiden estimaatteja "t–suhteita" käyttäen ja pohdi erityisesti voitaisiinko α:n ensimmäinen (toinen) komponentti ja kaikkien Λ_j–matriisien oikean yläkulman (vasemman alakulman) alkiot tulkita nollaksi. Jos voidaan, niin miten tulkitset "virheenkorjausmekanismia"? Piirrä myös mallin impulssivasteiden kuvat.

3. Tarkastellaan HT:n 5.4 yleistystä. Olkoon δ $(m \times 1)$ parametri ja $\hat{\delta}$ sen estimaattori. Oletetaan, että

$$T(\hat{\delta} - \delta) \xrightarrow{d} V^{-1/2}\zeta, \quad \zeta \sim \mathsf{N}(0, I_m) \ \text{ ja } \ \zeta \perp\!\!\!\perp V,$$

jossa V $(m \times m)$ on satunnainen positiivisesti definiitti matriisi. Olkoon $T^{-2}V_T$ matriisin V empiirinen vastine, jolle pätee $T^{-2}V_T \xrightarrow{d} V$ (tarkkaan ottaen tämän ja edellä mainitun jakaumakonvergenssin täytyy päteä yhteisjakaumien tasolla). Tarkastellaan lineaarista hypoteesia $R\delta = b$, jossa R $(q \times m)$ ja b $(q \times 1)$ ovat tunnettuja ja $\mathsf{r}(R) = q$. Osoita, että Waldin testisuureelle pätee (olettaen hypoteesi)

$$\mathsf{W} = T(R\hat{\delta} - b)' \left[R\left(T^{-2}V_T\right)^{-1} R'\right]^{-1} T(R\hat{\delta} - b) \xrightarrow{d} \chi^2_q.$$

Vihje: Kuten HT:n 5.4 ratkaisussa, ei tässäkään vaadita täydellistä matemaattista täsmällisyyttä. Päättele ensin jakaumakonvergenssi sv:lle $T(R\hat{\delta} - b) = TR(\hat{\delta} - \delta)$ ja sen jälkeen testisuureelle W niin, että raja-arvo ilmaistaan muuttujien ζ ja V avulla. Raja-arvon jakauman voit tämän jälkeen päätellä kuten HT:n 5.4 kohdassa (i). Tässäkin voi vedota Liitteen B Lauseeseen B.2 (tarkkaan ottaen tämä vaatii tehtävässä suluissa mainitun jakaumakonvergenssin yhteisjakaumien tasolla).

4. Olkoon β (4×2) yi–matriisi. Tarkastellaan tyyppiä $H_0 : \beta = H\delta$ olevaa lineaarista hypoteesia, jossa H (4×3) on tunnettu, δ (3×2) on tuntematon parametrimatriisi ja H:n aste on 3.

(i) Muotoile tämä hypoteesi (eli selvitä H) eksplisiittisesti tilanteessa, jossa hypoteesin mukaan muotoa $b = (b_1, -b_1, b_2, b_3)$ oleva vektori on (toinen) yi–vektori.

(ii) Osoita, että edellisen hypoteesin voimassa ollessa (eli muotoa $b = (b_1, -b_1, b_2, b_3)$ olevan vektorin ollessa yi–vektori) yi–matriisiksi voidaan valita

$$\beta = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ -b_1 & 0 \\ b_2 & b_4 \\ b_3 & b_5 \end{bmatrix}.$$