Epästationaariset aikasarjat kl 2012, HT 5, viikko 8

Kahdessa ensimmäisessä tehtävässä testataan empiirisesti yksikköjuuren olemassaoloa. Tarvittava R-koodit ja aineistot löytyvät kurssisivulta. Vaihtoehtoisesti voit käyttää JMulti-ohjelmistoa tai jotain muuta vastaavaa ohjelmistoa. Ensimmäisen tehtävän aineisto on HT:ssä 4.2 käytetty erään Lydia E. Pinkham -lääkeyhtiön valmistaman tuotteen vuotuisista myyntituloista ja mainontamenoista koostuva kahden muuttujan aineisto ajalta 1907-1960 (luvut esitetty 1000 dollareina). Toisen tehtävän aineisto koostuu maapallon vuotuisista lämpötilapoikkeamista eteläisellä pallonpuoliskolla ja pohjoisella pallonpuoliskolla ajalta 1850-2010 (poikkeamat suhteessa vuosien 1961-1990 keskiarvoon).

1. Valitse Lydia Pinkham -aineistolle sopiva VAR-malli ja selvitä monisteen jaksossa 7.2 esitettyä testausmenettelyä käyttäen ovatko myyntitulot ja mainontamenot yhteisintegroituneita.

Huom.: Testi vaatii "sopivan" mallin valinnan, mihin kuuluu AR-mallin asteen valinnan lisäksi deterministisen komponentin valinta (eli valinta siitä sisällytetäänkö malliin vakiotermi tai lineaarinen aikatrendi tai ei kumpaankaan). Tämä koskee myös seuraavaa tehtävää.

2. Valitse maapallon lämpötila-aineistolle sopiva VAR-malli ja selvitä monisteen jaksossa 7.2 esitettyä testausmenettelyä käyttäen ovatko eteläisen pallonpuoliskon ja pohjoisen pallonpuoliskon lämpötilapoikkeamat yhteisintegroituneita.

3. Tarkastellaan n–ulotteista VAR(p)–prosessia

$$x_t = A_1 x_{t-1} + \cdots + A_p x_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ..., \qquad (*)$$

jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\,(0, \Omega)$. Kuten monisteen s. 50 tämä malliyhtälö voidaan esittää myös muodossa

$$\Delta x_t = \Theta x_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Lambda_j \Delta x_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ... \qquad (**)$$

Tarkastellaan hypoteesia $\Lambda_{p-1} = 0$, jonka voimassa ollessa mallin astetta voidaan pienentää yhdellä. Osoita, että malliyhtälöön $(*)$ ja malliyhtälöön $(**)$ perustuvat uskottavuusosamäärätestin testisuureet ovat identtiset. Päättele tästä edelleen, että monisteen s. 72 mainittu malliyhtälöön $(**)$ ja uskottavuusosamäärätestiin perustuva mallin asteen valintamenettely voidaan perustaa myös malliyhtälöön $(*)$ ja että monisteen s. 32-33 esitetyt mallinvalintakriteerit voidaan samoin perustaa kumpaan tahansa malliyhtälöön.

Vihje: Tehtävässä mainittujen monisteen sivujen lisäksi monisteen s. 30-31.

Huom.: Tehtävä yleistyy myös monisteen s. 72 esitettyyn malliin, jossa on lineaarinen trendi (samoin malliin, jossa on vakio). Kuten monisteen s. 72 mainitaan, voidaan uskottavuusosamäärätestiä sovellettaessa käyttää myös I(1)–tapauksessa tavanomaista (asymptoottista) $\chi^2_{n^2}$–jakaumaa kuten stationaarisessa tapauksessakin.

Huomaa kuitenkin, että yleisemmin malliyhtälön $(*)$ kerroinmatriiseja koskevia hypoteeseja on I(1)–tapauksessa hankala testata. Malliyhtälön $(**)$ kerroinmatriiseja $\Lambda_1, ..., \Lambda_{p-1}$ koskevien hypoteesien testaaminen sen sijaan sujuu I(1)–tapauksessakin tavanomaseen tapaan (asymptoottista) χ^2–jakaumaa käyttäen.

4. Tarkastellaan monisteen s. 73-74 käsiteltyä estimaattoria $\hat{\mathfrak{a}}$, jolle pätee

$$\hat{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a} \sim \left(Q'Q\right)^{-1/2} \zeta, \quad \text{jossa} \quad \zeta \sim \mathsf{N}\left(0, \omega^2 I_{n-1}\right) \quad \text{ja} \quad \zeta \perp\!\!\!\perp Q.$$

Yleistetään s. 74 esitetty parametria $\mathfrak{a}$ $((n-1)\times 1)$ koskeva hypoteesi $\mathfrak{a} = c$ muotoon $R\mathfrak{a} = b$, jossa R $(m \times (n-1))$ ja b $(m \times 1)$ ovat tunnettuja ja $\mathsf{r}(R) = m$. Oletetaan, että tämä hypoteesi on voimassa.
(i) Perustele tulos

$$(R\hat{\mathfrak{a}} - b)' \left[R\left(Q'Q\right)^{-1} R'\right]^{-1} (R\hat{\mathfrak{a}} - b)/\omega^2 \sim \chi^2_m.$$

(ii) Perustele edellisen avulla, että Waldin testisuureelle pätee

$$\mathsf{W} = (R\hat{\mathfrak{a}} - b)' \left[R\left(Q'Q\right)^{-1} R'\right]^{-1} (R\hat{\mathfrak{a}} - b)/\hat{\omega}^2 \xrightarrow{d} \chi^2_m,$$

kun $\hat{\omega}^2$ on varianssin ω^2 tarkentuva estimaattori.

Vihje: Perusteluissa ei vaadita täydellistä matemaattista täsmällisyyttä, vaan monisteen s. 74 käytetyt argumentit tähän tilanteeseen modifioituina riittävät. Kohdassa (i) voi aluksi kirjoittaa $R\hat{\mathfrak{a}} - b = R(\hat{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}) = R\left(Q'Q\right)^{-1/2}\zeta$, jossa $\zeta = \left(Q'Q\right)^{-1/2} Q'\eta$, ja menetellä kuten monisteessa s. 74 siellä esitettyä "sopivasti" modifioiden. Kohta (ii) on suoraviivainen (kuten monisteessakin). Siinä voi vedota Liitteen B Lauseisiin B.2 ja B.3.